Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{C}(X)$: $R = \dfrac{x}{(x^2+1)(x^2-j^2)^2}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $R = \dfrac{6}{(x+1)(x^2+x+1)(x^2+x+2)(x^2+x+3)}$

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Même question avec $R = \dfrac{1}{x^8+x^4+1}$

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Même question avec $R = \dfrac{x^3-x+2}{(x^2+1)^4(x^2+x+1)x}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Même question avec $R = \dfrac{1}{x^5(1-x)^5(x^2-x+1)}$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

La fraction R est impaire.

On trouve $R(x) = \dfrac{j}{2(x-i)} + \dfrac{j}{2(x+i)} - \dfrac{j}{4(x-j)^2} - \dfrac{j}{2(x-j)} + \dfrac{j}{4(x+j)^2} - \dfrac{j}{2(x+j)}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $R = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3x}{x^2+x+1} + \dfrac{3x}{x^2+x+2} - \dfrac{x}{x^2+x+3}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On commence par factoriser le dénominateur :

$x^8+x^4+1 = (x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$ puis $\begin{cases} x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1) \\ x^4-x^2+1 = (x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1) \end{cases}$

La fraction R est paire. On a aussi $R(ix) = R(x)$.

Finalement $R = \dfrac{1}{4(x^2+x+1)} + \dfrac{1}{4(x^2-x+1)} + \dfrac{2x\sqrt{3}+3}{12(x^2+x\sqrt{3}+1)} - \dfrac{2x\sqrt{3}-3}{12(x^2-x\sqrt{3}+1)}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On trouve $R = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4x+1}{x^2+x+1} + \dfrac{2(x-1)}{(x^2+1)^4} - \dfrac{x+4}{(x^2+1)^3} - \dfrac{5x+1}{(x^2+1)^2} - \dfrac{3(2x-1)}{x^2+1}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On commence par constater que $R(x) = R(1-x)$.

On est amené à utiliser le développement limité $x^5R(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\mathrm{o}(x^4)$.

Finalement :

$R = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{6}{x^4} + \dfrac{20}{x^3} + \dfrac{49}{x^2} + \dfrac{99}{x} + \dfrac{1}{(1-x)^5} + \dfrac{6}{(1-x)^4} + \dfrac{20}{(1-x)^3} + \dfrac{49}{(1-x)^2} + \dfrac{99}{1-x} + \dfrac{1}{x^2-x+1}$.