



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}(X)$: $R = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{C}(X)$: $R = \frac{1}{x^4(x-i)^3}$

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$: $R = \frac{1-ax^2}{x^n(1-ax)(1-bx)}$ (avec $a, b \neq 0$, $a \neq b$, $n \geq 1$).

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Même question avec $R = \frac{x^{11}}{(x^2+x+1)^4}$

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Même question avec $R = \frac{x^5-x^2+1}{(x^2+1)^2(x+1)^2}$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, multiplier R par $x + k$ et poser $x = -k$.

$$\text{On trouve } R = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{x + k}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Considérer le développement limité $\frac{1}{(x-i)^3} = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$.

$$\text{On trouve } \frac{1}{x^4(x-i)^3} = -\frac{i}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{6i}{x^2} + \frac{10}{x} + \frac{1}{(x-i)^3} + \frac{4i}{(x-i)^2} - \frac{10}{x-i}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{Écrire } R = \frac{1 - abx^2}{x^n(1-ax)(1-bx)} = \frac{\lambda}{1-ax} + \frac{\mu}{1-bx} + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_{n-k}}{x^k} \quad (1)$$

On trouve d'abord $\lambda = a^n$ et $\mu = b^n$.

On multiplie par $x^n(1-ax)(1-bx)$ et on développe.

Il en résulte des relations de récurrence sur les coefficients α .

$$\text{On trouve finalement } R = \frac{a^n}{1-ax} + \frac{b^n}{1-bx} + \sum_{k=1}^n \frac{a^{n-k} + b^{n-k}}{x^k}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On procède à des divisions successives de $A = x^{11}$ par $B = x^2 + x + 1$.

$$\text{On trouve } R = x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{x+1}{(x^2+x+1)^4} + \frac{3x+7}{(x^2+x+1)^3} + \frac{3x-15}{(x^2+x+1)^2} - \frac{15x-9}{(x^2+x+1)}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On trouve } R = \frac{-1}{4(x+1)^2} + \frac{5}{4(x+1)} - \frac{2x-1}{2(x^2+1)^2} - \frac{x+2}{4(x^2+1)}.$$