# Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ Indication ] [ Correction ]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}(X)$ : $R = \dfrac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$.

EXERCICE 2 [ Indication ] [ Correction ]

Décomposer en élément simples dans $\mathbb{C}(X)$ : $R = \dfrac{1}{x^4(x-i)^3}$

EXERCICE 3 [ Indication ] [ Correction ]

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ : $R = \dfrac{1-abx^2}{x^n(1-ax)(1-bx)}$ (avec $a, b \neq 0$, $a \neq b$, $n \geq 1$).

EXERCICE 4 [ Indication ] [ Correction ]

Même question avec $R = \dfrac{x^{11}}{(x^2+x+1)^4}$

EXERCICE 5 [ Indication ] [ Correction ]

Même question avec $R = \dfrac{x^5-x^2+1}{(x^2+1)^2(x+1)^2}$

# Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $k$ de $\{0,\ldots,n\}$, multiplier $R$ par $x+k$ et poser $x=-k$.

On trouve $R=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}{x+k}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Considérer le développement limité $\dfrac{1}{(x-i)^3}=a+bx+cx^2+dx^3+\mathrm{o}(x^3)$.

On trouve $\dfrac{1}{x^4(x-i)^3}=-\dfrac{i}{x^4}-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{6i}{x^2}+\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{(x-i)^3}+\dfrac{4i}{(x-i)^2}-\dfrac{10}{x-i}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Écrire $R=\dfrac{1-abx^2}{x^n(1-ax)(1-bx)}=\dfrac{\lambda}{1-ax}+\dfrac{\mu}{1-bx}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{n-k}}{x^k}$ (1)

On trouve d'abord $\lambda=a^n$ et $\mu=b^n$.

On multiplie par $x^n(1-ax)(1-bx)$ et on développe.

Il en résulte des relations de récurrence sur les coefficients $\alpha$.

On trouve finalement $R=\dfrac{a^n}{1-ax}+\dfrac{b^n}{1-bx}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{n-k}+b^{n-k}}{x^k}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

On procède à des divisions successives de $A=x^{11}$ par $B=x^2+x+1$.

On trouve $R=x^3-4x^2+6x-\dfrac{x+1}{(x^2+x+1)^4}+\dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)^3}+\dfrac{3x-15}{(x^2+x+1)^2}-\dfrac{15x-9}{(x^2+x+1)}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve $R=\dfrac{-1}{4(x+1)^2}+\dfrac{5}{4(x+1)}-\dfrac{2x-1}{2(x^2+1)^2}-\dfrac{x+2}{4(x^2+1)}$.