Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Résoudre $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$ sachant que la somme de deux des solutions vaut 2.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la somme des puissances quatrièmes des racines a, b, c de $P = X^3 + pX + q$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ sachant que les solutions sont en progression géométrique.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient a, b, c les racines de $A = X^3 + pX^2 + qX + r = 0$.
Former l'équation dont les racines sont $\alpha = b + c$, $\beta = a + c$ et $\gamma = a + b$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On pose $A(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.
Déterminer la condition sur p, q, r pour que l'une des racines de A soit la somme des autres.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum \left(\dfrac{\alpha+2}{2\alpha+5}\right)^3$, où α décrit l'ensemble des racines de $A = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter a, b, c, d les racines de $P = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$.

Écrire les relations coefficients-racines et ajouter par exemple la condition $a + b = 2$.

On aboutit à $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=-1 \end{cases}$ et $\begin{cases} c+d=2 \\ cd=-2 \end{cases}$.

Les racines de P sont $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On observe tout d'abord que $a + b + c = 0$, et $a^2 + b^2 + c^2 = -2p$.

En exprimant que a, b, c annulent P on trouve $a^3 + b^3 + c^3 = -3q$.

Finalement $a^4 + b^4 + c^4 = 2p^2$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On ajoute $ac = b^2$ aux relations coefficients-racines.

On trouve $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$, qui sont en progression géométrique de raison 2.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On commence par justifier les égalités $\alpha = -p - a$, $\beta = -p - b$ et $\gamma = -p - c$.

On utilise ensuite le changement de variable $y = -p - x$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

La somme des racines a, b, c de A vaut $-p$. Donc $a = b + c \Leftrightarrow 2a = a + b + c = -p$.

La condition est donc que $-\frac{p}{2}$ est racine de A.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On inverse le changement de variable $\beta = \dfrac{\alpha+2}{2\alpha+5}$.

On en déduit que $A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow B(\beta) = 0$, avec $B(\beta) = 3\beta^3 - 20\beta^2 + 15\beta - 3$.

On cherche donc la somme des cubes des racines de B. On trouve $\frac{5381}{27}$.