Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Résoudre $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$ sachant que la somme de deux des solutions vaut 2.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la somme des puissances quatrièmes des racines a, b, c de $P = X^3 + pX + q$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre $8x^3 - 42x^2 + 63x - 27 = 0$ sachant que les solutions sont en progression géométrique.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient a, b, c les racines de $A = X^3 + pX^2 + qX + r = 0$.
Former l'équation dont les racines sont $\alpha = b + c$, $\beta = a + c$ et $\gamma = a + b$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

On pose $A(x) = x^3 + px^2 + qx + r$.
Déterminer la condition sur p, q, r pour que l'une des racines de A soit la somme des autres.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Calculer $\sum \left(\dfrac{\alpha + 2}{2\alpha + 5}\right)^3$, où α décrit l'ensemble des racines de $A = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Noter a, b, c, d les racines de $P = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$.

Écrire les relations coefficients-racines et ajouter par exemple la condition $a + b = 2$.

On aboutit à $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} c + d = 2 \\ cd = -2 \end{cases}$.

Les racines de P sont $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{3}$ et $1 + \sqrt{3}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On observe tout d'abord que $a + b + c = 0$, et $a^2 + b^2 + c^2 = -2p$.

En exprimant que a, b, c annulent P on trouve $a^3 + b^3 + c^3 = -3q$.

Finalement $a^4 + b^4 + c^4 = 2p^2$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On ajoute $ac = b^2$ aux relations coefficients-racines.

On trouve $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3$, qui sont en progression géométrique de raison 2.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On commence par justifier les égalités $\alpha = -p - a$, $\beta = -p - b$ et $\gamma = -p - c$.

On utilise ensuite le changement de variable $y = -p - x$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

La somme des racines a, b, c de A vaut $-p$. Donc $a = b + c \Leftrightarrow 2a = a + b + c = -p$.

La condition est donc que $-\frac{p}{2}$ est racine de A.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On inverse le changement de variable $\beta = \dfrac{\alpha + 2}{2\alpha + 5}$.

On en déduit que $A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow B(\beta) = 0$, avec $B(\beta) = 3\beta^3 - 20\beta^2 + 15\beta - 3$.

On cherche donc la somme des cubes des racines de B. On trouve $\frac{5381}{27}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.