

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

a, b, c, d étant des réels, résoudre $z + |z| = a + ib$, puis $|z| - z = c + id$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On suppose que $-\pi < \varphi \leq \pi$. Module et argument des nombres complexes suivants :

$a = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$, $b = \sin \varphi + i(1 + \cos \varphi)$, $c = \cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Module et argument de $a = \frac{(1 + i \tan \theta)^2}{1 + \tan^2 \theta}$ et $b = \frac{1 - \cos \theta + i \sin \theta}{1 + \cos \theta - i \sin \theta}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Du calcul de $(1 + i)(\sqrt{3} + i)$, déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Simplifier le nombre complexe $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Simplifier $z = (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Si $a + ib = 0$, on trouve les réels négatifs ou nuls.

Si $a + ib \neq 0$, poser $a + ib = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Si $a \leq 0$, il n'y a pas de solution, sinon on trouve $z = \frac{a^2 - b^2}{2a} + ib$

2. Il faut $c > 0$ et on trouve alors $z = \frac{d^2 - c^2}{2c} - id$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– On trouve $|a| = 2 \cos \frac{\varphi}{2}$. Si $a \neq 0$ alors $\arg a = \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

– Utiliser $b = i\bar{a}$ et ce qui précède.

– On trouve $\arg(c) = 2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|$.

Si $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$, alors $\arg(c) = \frac{5\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

Si $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$, alors $\arg(c) = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– On obtient $|a| = 1$ et $\arg(a) = 2\theta \pmod{2\pi}$.

– On obtient $|b| = \left| \tan \frac{\theta}{2} \right|$ et $\arg(b) = \varepsilon \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On trouve $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On trouve $z = 512(-1 + i\sqrt{3})$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

En notant $n = 6q + r$, avec $0 \leq r \leq 5$, on obtient $z = 2^{n+1} \cos \frac{r\pi}{3}$.