

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Montrer que S_n ($n \geq 2$) est engendré par les transpositions $\tau_j = (1, j)$ avec $2 \leq j \leq n$.
2. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de telles transpositions.

NB : on utilisera la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.

3. Passer de *MERCI* à *CRIME* par des échanges de deux lettres dont la première.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans S_n , soit c la permutation circulaire $(1, 2, \dots, n-1, n)$.

Montrer que les permutations qui commutent avec c sont les puissances de c .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que si deux cycles commutent, alors leurs supports sont identiques ou disjoints.
2. Inversement former deux cycles σ et σ' ayant même support, mais tels que $\sigma \circ \sigma' \neq \sigma' \circ \sigma$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se place dans le groupe symétrique S_n , avec $n \geq 3$. Montrer que toute permutation paire est un produit de cycles du type $c_k = (1, 2, k)$ avec $3 \leq k \leq n$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Montrer que dans le groupe symétrique S_n (avec $n \geq 3$), toute permutation paire est un produit de cycles de longueur 3.
2. Effectuer une telle décomposition pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de montrer que toute transposition est un produit de τ_j .
2. Décomposer σ en cycles, ces cycles en transpositions, puis ces transpositions.
3. Il y a cinq étapes.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Si $\sigma \circ c = c \circ \sigma$, poser $\sigma(1) = k$ et montrer que $\sigma = c^k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Soient σ, σ' deux cycles qui commutent. Si x est dans le support de σ mais pas dans celui de σ' , montrer que les $\sigma^k(x)$ sont invariants par σ' .
2. Inversement, considérer $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ et $\sigma' = (1, 2, 4, 3)$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Procéder par récurrence sur n , en commençant par le cas $n = 3$.

Dans le passage du rang n au rang $n+1$, se donner une permutation paire σ de $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$.

Considérer les cas $\sigma(n+1) = n+1$, puis $\sigma(n+1) = j \leq n$.

Dans ce dernier cas, considérer $c_{n+1}^{-1} \circ c_j \circ \sigma$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que le produit $\sigma = \tau \circ \tau'$ de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3. On discutera suivant l'intersection des supports de ces deux transpositions.
2. Décomposer σ en transpositions, que l'on groupera par paires.