# Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. Montrer que $S_n$ $(n \geq 2)$ est engendré par les transpositions $\tau_j = (1, j)$ avec $2 \leq j \leq n$.
2. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de telles transpositions.

   NB : on utilisera la décomposition de $\sigma$ en produit de cycles à supports disjoints.
3. Passer de $MERCI$ à $CRIME$ par des échanges de deux lettres dont la première.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $S_n$, soit $c$ la permutation circulaire $(1, 2, \ldots, n-1, n)$.

Montrer que les permutations qui commutent avec $c$ sont les puissances de $c$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On se donne un entier $n \geq 2$.

1. Montrer que si deux cycles commutent, alors leurs supports sont identiques ou disjoints.
2. Inversement former deux cycles $\sigma$ et $\sigma'$ ayant même support, mais tels que $\sigma \circ \sigma' \neq \sigma' \circ \sigma$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On se place dans le groupe symétrique $S_n$, avec $n \geq 3$. Montrer que toute permutation paire est un produit de cycles du type $c_k = (1, 2, k)$ avec $3 \leq k \leq n$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

1. Montrer que dans le groupe symétrique $S_n$ (avec $n \geq 3$), toute permutation paire est un produit de cycles de longueur 3.
2. Effectuer une telle décomposition pour $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

# Indications ou résultats

**Indication pour l'exercice 1** [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de montrer que toute transposition est un produit de $\tau_j$.
2. Décomposer $\sigma$ en cycles, ces cycles en transpositions, puis ces transpositions.
3. Il y a cinq étapes.

**Indication pour l'exercice 2** [Retour à l'énoncé]

Si $\sigma \circ c = c \circ \sigma$, poser $\sigma(1) = k$ et montrer que $\sigma = c^k$.

**Indication pour l'exercice 3** [Retour à l'énoncé]

1. Soient $\sigma, \sigma'$ deux cycles qui commutent. Si $x$ est dans le support de $\sigma$ mais pas dans celui de $\sigma'$, montrer que les $\sigma^k(x)$ sont invariants par $\sigma'$.
2. Inversement, considérer $\sigma = (1,2,3,4)$ et $\sigma' = (1,2,4,3)$

**Indication pour l'exercice 4** [Retour à l'énoncé]

Procéder par récurrence sur $n$, en commençant par le cas $n = 3$.

Dans le passage du rang $n$ au rang $n+1$, se donner une permutation paire $\sigma$ de $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$.

Considérer les cas $\sigma(n+1) = n+1$, puis $\sigma(n+1) = j \leq n$.

Dans ce dernier cas, considérer $c_{n+1}^{-1} \circ c_j \circ \sigma$.

**Indication pour l'exercice 5** [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que le produit $\sigma = \tau \circ \tau'$ de deux transpositions est un produit de cycles de longueur 3. On discutera suivant l'intersection des supports de ces deux transpositions.
2. Décomposer $\sigma$ en transpositions, que l'on groupera par paires.


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.