Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On considère la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ de S_{12}.

1. Décomposer σ en produits de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer σ en produits de transpositions.
3. Quelle est la parité de σ ?
4. Calculer l'entier minimum n tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$.
5. Calculer σ^{1999}.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

1. A quelle condition une permutation σ commute-t-elle avec une tranposition $\tau = (i, j)$?
2. En déduire que si $n \geq 3$, seule Id commute avec tous les éléments de S_n.
3. Montrer que si $n \geq 4$, seule Id commute avec toutes les permutations paires.
   Indication : utiliser les cycles de longueur 3.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

1. Montrer que le groupe symétrique S_n (avec $n \geq 2$) est engendré par les transpositions $\tau_j = (j, j+1)$ avec $1 \leq j \leq n-1$.
2. Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de telles transpositions.
   NB : on utilisera la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints.
3. Passer du mot $MERCI$ au mot $CRIME$ par des échanges de lettres contigües :
   (a) Par une méthode s'appuyant sur la question précédente.
   (b) Par une méthode directe. En déduire une nouvelle réponse à la question (2).

Exercice 4 [Indication] [Correction]

1. On suppose $n \geq 3$ et on note c la permutation circulaire $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$
   Montrer que le groupe S_n est engendré par c et par la transposition $\tau = (1, 2)$.
   Indication : on utilisera le résultat de la question (1) de l'exercice précédent.
2. Application : on veut passer du mot $MERCI$ au mot $CRIME$ uniquement par des rotations du mot vers la droite ou des échanges des deux premières lettres.
   (a) Donner une solution utilisant le résultat la question (2) de l'exercice précédent.
   (b) Imaginer une solution directe, nécessitant beaucoup moins d'étapes. Commenter.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$, avec $\sigma_1 = (1, 6, 11, 8, 3)$, $\sigma_2 = (2, 12, 5, 9)$, et $\sigma_3 = (4, 10, 7)$.
2. Décomposer σ_1, σ_2 et σ_3 en produits de transpositions.
3. σ est impaire (on peut donner deux méthodes.)
4. Le plus petit entier n tel que $\sigma_n = \mathrm{Id}$ est 60.
5. On peut écrire : $\sigma^{1999} = \sigma^{19} = \sigma_1^4 \circ \sigma_2^3 \circ \sigma_3$.

   Finalement $\sigma^{1999} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 9 & 8 & 10 & 12 & 1 & 4 & 11 & 5 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma \Leftrightarrow \{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$.
2. Si σ commute avec tous les éléments de S_n, elle commute avec les transpositions.

   Considérer $\tau = (i, j)$ et $\tau' = (i, k)$, avec i, j, k dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.
3. Si σ commute avec les permutations paires, elle commute avec les cycles de longueur 3.

   Considérer $c = (i, j, k)$, et x dans $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i, j, k\}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de montrer que toute transposition peut s'écrire comme un produit de τ_j.
2. Décomposer σ en cycles, puis ces cycles en transpositions, puis ces transpositions...
3. La question précédente donne un résultat en 9 étapes.

   Il y a une méthode directe en 7 étapes.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Il suffit de prouver que $(i, i + 1)$ s'écrit en utilisant c (et ses puissances) et $\tau = (1, 2)$.

   Considérer $s = c^{1-i} = c^{n+1-i}$ et calculer $s^{-1} \circ \tau \circ s$.
2. Le nombre d'étapes, si on se contente d'utiliser la question précédente, est assez important.

   En revanche, il existe une méthode directe beaucoup plus rapide.