Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la loi T par $x \operatorname{T} y = \alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$).

1. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \to x \operatorname{T} y$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Quel en est le noyau ?
3. On se donne un entier n strictement positif.
   Montrer qu'on définit une loi sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant : $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{x \operatorname{T} y}$.
4. Montrer $\star$ est associative $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha(\alpha - 1)$ et $\beta(\beta - 1)$.
5. Montrer que $\star$ est commutative $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha - \beta$.
6. Montrer qu'il existe un neutre $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha - 1$ et $\beta - 1$.
7. En déduire à quelle condition $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On se donne un entier premier p strictement supérieur à 2.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, quels sont les éléments qui sont leur propre inverse ?
2. En déduire que p divise $(p - 1)! + 1$.
3. Établir la réciproque.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre l'équation $x^2 + 2x = 3$ dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On munit $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ des lois : $\begin{cases} (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \star (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba') \end{cases}$

Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Vérification facile.
2. Soit $d = \text{pgcd}\,(\alpha, \beta)$, et α', β' tels que $\alpha = d\alpha'$ et $\beta = d\beta'$.
   Le noyau de φ est formé des couples $(x, y) = k(\beta', -\alpha')$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Si $x' = x + an$ et $y' = y + bn$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, vérifier que $x' \,\mathrm{T}\, y' = x \,\mathrm{T}\, y \pmod n$.
4. Vérifier que $\overline{x} \star (\overline{y} \star \overline{z}) - (\overline{x} \star \overline{y}) \star \overline{z} = \overline{\beta(\beta - 1)z - \alpha(\alpha - 1)x}$.
5. Vérifier que $\overline{x} \star \overline{y} - \overline{y} \star \overline{x} = \overline{(\alpha - \beta)(x - y)}$.
6. Vérifier $\overline{x} \star \overline{e} = \overline{x} \Leftrightarrow n \,|\, (\alpha - 1)x + \beta e$ et $\overline{e} \star \overline{x} = \overline{x} \Leftrightarrow n \,|\, (\beta - 1)x + \alpha e$.
   Utiliser $x = 0$ puis $x = 1$. La réciproque est facile. Le neutre est alors $\overline{0}$.
7. On regroupe les conditions précédentes. Il reste $\overline{\alpha} = \overline{1}$ et $\overline{\beta} = \overline{1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Les deux seuls qui sont leur propre inverse sont $\overline{1}$ et $\overline{p - 1}$.
2. Effectuer le produit de tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Dans ce produit grouper les éléments par paires d'inverses.
3. Soit n un entier naturel non premier, avec $n > 2$.
   Si $k \in \{2, \ldots, n - 1\}$ divise n, il divise $(n - 1)!$ mais pas $(n - 1)! + 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$.

- Dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$, les solutions sont $\overline{1}$ et $\overline{94}$.
- Dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, $x = \overline{1}$ et $x = \overline{88}$ sont solutions.
  Si x est une autre solution, $x - 1$ et $x + 3$ sont des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.
  Or les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont les ... ?
  Les solutions dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont finalement $\overline{1}, \overline{36}, \overline{53}, \overline{88}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- $(K, +)$ est un groupe commutatif. La loi $\star$ est commutative. $(1, 0)$ est neutre pour $\star$.
- Associativité et distributivité : calculatoire mais facile.
- Soit $z = (a, b)$ non nul dans K.
  On doit résoudre $(a, b) \star (a', b') = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$.
  On vérifie que $\Delta = a^2 - 2b^2$ est inversible dans le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
  Si u est son inverse, poser $a' = ua$ et $b' = -bu$.