

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans \mathbb{Z} , on définit la loi T par $x T y = \alpha x + \beta y$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$).

1. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \rightarrow x T y$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Quel en est le noyau ?
3. On se donne un entier n strictement positif.

Montrer qu'on définit une loi sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant : $\bar{x} \star \bar{y} = \overline{x T y}$.

4. Montrer \star est associative $\Leftrightarrow n$ divise $\alpha(\alpha - 1)$ et $\beta(\beta - 1)$.
5. Montrer que \star est commutative $\Leftrightarrow n$ divise $\alpha - \beta$.
6. Montrer qu'il existe un neutre $\Leftrightarrow n$ divise $\alpha - 1$ et $\beta - 1$.
7. En déduire à quelle condition $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne un entier premier p strictement supérieur à 2.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, quels sont les éléments qui sont leur propre inverse ?
2. En déduire que p divise $(p - 1)! + 1$.
3. Établir la réciproque.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre l'équation $x^2 + 2x = 3$ dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On munit $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ des lois :
$$\begin{cases} (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \star (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba') \end{cases}$$

Montrer que \mathbb{K} est un corps.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Vérification facile.
- Soit $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, et α', β' tels que $\alpha = d\alpha'$ et $\beta = d\beta'$.
Le noyau de φ est formé des couples $(x, y) = k(\beta', -\alpha')$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $x' = x + an$ et $y' = y + bn$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), vérifier que $x' \text{T} y' = x \text{T} y \pmod{n}$.
- Vérifier que $\bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z}) - (\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = \frac{\beta(\beta - 1)z - \alpha(\alpha - 1)x}{n}$.
- Vérifier que $\bar{x} \star \bar{y} - \bar{y} \star \bar{x} = \frac{(\alpha - \beta)(x - y)}{n}$.
- Vérifier $\bar{x} \star \bar{e} = \bar{x} \Leftrightarrow n \mid (\alpha - 1)x + \beta e$ et $\bar{e} \star \bar{x} = \bar{x} \Leftrightarrow n \mid (\beta - 1)x + \alpha e$.
Utiliser $x = 0$ puis $x = 1$. La réciproque est facile. Le neutre est alors $\bar{0}$.
- On regroupe les conditions précédentes. Il reste $\bar{\alpha} = \bar{1}$ et $\bar{\beta} = \bar{1}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Les deux seuls qui sont leur propre inverse sont $\bar{1}$ et $\overline{p-1}$.
- Effectuer le produit de tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Dans ce produit grouper les éléments par paires d'inverses.
- Soit n un entier naturel non premier, avec $n > 2$.
Si $k \in \{2, \dots, n-1\}$ divise n , il divise $(n-1)!$ mais pas $(n-1)! + 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquer que $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$.

- Dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$, les solutions sont $\bar{1}$ et $\overline{94}$.
- Dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, $x = \bar{1}$ et $x = \overline{88}$ sont solutions.

Si x est une autre solution, $x-1$ et $x+3$ sont des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

Or les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont les ... ?

Les solutions dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont finalement $\bar{1}, \overline{36}, \overline{53}, \overline{88}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- $(K, +)$ est un groupe commutatif. La loi \star est commutative. $(1, 0)$ est neutre pour \star .
- Associativité et distributivité : calculatoire mais facile.
- Soit $z = (a, b)$ non nul dans K .

$$\text{On doit résoudre } (a, b) \star (a', b') = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}.$$

On vérifie que $\Delta = a^2 - 2b^2$ est inversible dans le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Si u est son inverse, poser $a' = ua$ et $b' = -bu$.