Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{Z}$, on définit la loi T par $x\,\mathrm{T}\,y = \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*)$.

1. Montrer que l'application $\varphi : (x, y) \to x\,\mathrm{T}\,y$ est un morphisme de $(\mathbb{Z}^2, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Quel en est le noyau ?
3. On se donne un entier n strictement positif.
   Montrer qu'on définit une loi sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en posant : $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{x\,\mathrm{T}\,y}$.
4. Montrer $\star$ est associative $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha(\alpha - 1)$ et $\beta(\beta - 1)$.
5. Montrer que $\star$ est commutative $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha - \beta$.
6. Montrer qu'il existe un neutre $\Leftrightarrow$ n divise $\alpha - 1$ et $\beta - 1$.
7. En déduire à quelle condition $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On se donne un entier premier p strictement supérieur à 2.

1. Dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, quels sont les éléments qui sont leur propre inverse ?
2. En déduire que p divise $(p-1)! + 1$.
3. Établir la réciproque.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre l'équation $x^2 + 2x = 3$ dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On munit $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ des lois : $\begin{cases} (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \\ (a,b) \star (a',b') = (aa' + 2bb', ab' + ba') \end{cases}$

Montrer que $\mathbb{K}$ est un corps.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Vérification facile.
2. Soit $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$, et α', β' tels que $\alpha = d\alpha'$ et $\beta = d\beta'$.
   Le noyau de φ est formé des couples $(x, y) = k(\beta', -\alpha')$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Si $x' = x + an$ et $y' = y + bn$ $(a, b \in \mathbb{Z})$, vérifier que $x' \,\mathrm{T}\, y' = x \,\mathrm{T}\, y \pmod{n}$.
4. Vérifier que $\overline{x} \star (\overline{y} \star \overline{z}) - (\overline{x} \star \overline{y}) \star \overline{z} = \overline{\beta(\beta-1)z - \alpha(\alpha-1)x}$.
5. Vérifier que $\overline{x} \star \overline{y} - \overline{y} \star \overline{x} = \overline{(\alpha-\beta)(x-y)}$.
6. Vérifier $\overline{x} \star \overline{e} = \overline{x} \Leftrightarrow n \mid (\alpha-1)x + \beta e$ et $\overline{e} \star \overline{x} = \overline{x} \Leftrightarrow n \mid (\beta-1)x + \alpha e$.
   Utiliser $x = 0$ puis $x = 1$. La réciproque est facile. Le neutre est alors $\overline{0}$.
7. On regroupe les conditions précédentes. Il reste $\overline{\alpha} = \overline{1}$ et $\overline{\beta} = \overline{1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Les deux seuls qui sont leur propre inverse sont $\overline{1}$ et $\overline{p-1}$.
2. Effectuer le produit de tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Dans ce produit grouper les éléments par paires d'inverses.
3. Soit n un entier naturel non premier, avec $n > 2$.
   Si $k \in \{2, \dots, n-1\}$ divise n, il divise $(n-1)!$ mais pas $(n-1)! + 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$.

– Dans $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$, les solutions sont $\overline{1}$ et $\overline{94}$.

– Dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$, $x = \overline{1}$ et $x = \overline{88}$ sont solutions.
  Si x est une autre solution, $x-1$ et $x+3$ sont des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.
  Or les diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont les ... ?
  Les solutions dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ sont finalement $\overline{1}, \overline{36}, \overline{53}, \overline{88}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– $(K, +)$ est un groupe commutatif. La loi $\star$ est commutative. $(1, 0)$ est neutre pour $\star$.

– Associativité et distributivité : calculatoire mais facile.

– Soit $z = (a, b)$ non nul dans K.
  On doit résoudre $(a, b) \star (a', b') = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$.
  On vérifie que $\Delta = a^2 - 2b^2$ est inversible dans le corps $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
  Si u est son inverse, poser $a' = ua$ et $b' = -bu$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.