

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Dans  $\mathbb{Z}$ , on définit la loi  $\text{T}$  par  $x \text{T} y = \alpha x + \beta y$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$ ).

1. Montrer que l'application  $\varphi : (x, y) \rightarrow x \text{T} y$  est un morphisme de  $(\mathbb{Z}^2, +)$  dans  $(\mathbb{Z}, +)$ .
2. Quel en est le noyau ?
3. On se donne un entier  $n$  strictement positif.  
Montrer qu'on définit une loi sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en posant :  $\bar{x} \star \bar{y} = \overline{x \text{T} y}$ .
4. Montrer  $\star$  est associative  $\Leftrightarrow n$  divise  $\alpha(\alpha - 1)$  et  $\beta(\beta - 1)$ .
5. Montrer que  $\star$  est commutative  $\Leftrightarrow n$  divise  $\alpha - \beta$ .
6. Montrer qu'il existe un neutre  $\Leftrightarrow n$  divise  $\alpha - 1$  et  $\beta - 1$ .
7. En déduire à quelle condition  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \star)$  est un groupe commutatif.

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On se donne un entier premier  $p$  strictement supérieur à 2.

1. Dans l'anneau  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , quels sont les éléments qui sont leur propre inverse ?
2. En déduire que  $p$  divise  $(p - 1)! + 1$ .
3. Établir la réciproque.

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Résoudre l'équation  $x^2 + 2x = 3$  dans  $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$  puis dans  $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ .

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On munit  $\mathbb{K} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$  des lois : 
$$\begin{cases} (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \star (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba') \end{cases}$$

Montrer que  $\mathbb{K}$  est un corps.

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Vérification facile.
- Soit  $d = \text{pgcd}(\alpha, \beta)$ , et  $\alpha', \beta'$  tels que  $\alpha = d\alpha'$  et  $\beta = d\beta'$ .  
Le noyau de  $\varphi$  est formé des couples  $(x, y) = k(\beta', -\alpha')$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Si  $x' = x + an$  et  $y' = y + bn$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ), vérifier que  $x' \text{T} y' = x \text{T} y \pmod{n}$ .
- Vérifier que  $\bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z}) - (\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = \frac{\beta(\beta - 1)z - \alpha(\alpha - 1)x}{n}$ .
- Vérifier que  $\bar{x} \star \bar{y} - \bar{y} \star \bar{x} = \frac{(\alpha - \beta)(x - y)}{n}$ .
- Vérifier  $\bar{x} \star \bar{e} = \bar{x} \Leftrightarrow n \mid (\alpha - 1)x + \beta e$  et  $\bar{e} \star \bar{x} = \bar{x} \Leftrightarrow n \mid (\beta - 1)x + \alpha e$ .  
Utiliser  $x = 0$  puis  $x = 1$ . La réciproque est facile. Le neutre est alors  $\bar{0}$ .
- On regroupe les conditions précédentes. Il reste  $\bar{\alpha} = \bar{1}$  et  $\bar{\beta} = \bar{1}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Les deux seuls qui sont leur propre inverse sont  $\bar{1}$  et  $\overline{p-1}$ .
- Effectuer le produit de tous les éléments non nuls de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .  
Dans ce produit grouper les éléments par paires d'inverses.
- Soit  $n$  un entier naturel non premier, avec  $n > 2$ .  
Si  $k \in \{2, \dots, n-1\}$  divise  $n$ , il divise  $(n-1)!$  mais pas  $(n-1)! + 1$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquer que  $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$ .

– Dans  $\mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ , les solutions sont  $\bar{1}$  et  $\overline{94}$ .

– Dans  $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ ,  $x = \bar{1}$  et  $x = \overline{88}$  sont solutions.

Si  $x$  est une autre solution,  $x-1$  et  $x+3$  sont des diviseurs de zéro dans  $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$ .

Or les diviseurs de zéro dans  $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$  sont les ... ?

Les solutions dans  $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$  sont finalement  $\bar{1}, \overline{36}, \overline{53}, \overline{88}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- $(K, +)$  est un groupe commutatif. La loi  $\star$  est commutative.  $(1, 0)$  est neutre pour  $\star$ .
- Associativité et distributivité : calculatoire mais facile.
- Soit  $z = (a, b)$  non nul dans  $K$ .

On doit résoudre  $(a, b) \star (a', b') = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' + 2bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0 \end{cases}$ .

On vérifie que  $\Delta = a^2 - 2b^2$  est inversible dans le corps  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Si  $u$  est son inverse, poser  $a' = ua$  et  $b' = -bu$ .