Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

1. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Soient a et b deux entiers.
   Montrer que le système $\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$ possède des solutions et que celles-ci forment une classe d'entiers modulo mn.
2. Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $N = 4k + 3$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2520x - 3960y = 6480$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p - 1$, C_p^k est divisible par p.
2. En déduire que pour tous entiers a et b, $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.
3. Montrer que pour tout entier n, $n^p \equiv n \pmod{p}$ (c'est le *petit théorème de Fermat.*)
4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous entiers m et n, $N = mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Soient u, v dans $\mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. Considérer $\alpha = vna + umb$.
   Prouver ensuite que les solutions sont les $x = \alpha + kmn$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Ce système n'admet aucune solution (raisonner par l'absurde.)

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers de la forme $4k + 3$.

Nommons-les $p_0 = 3 < p_1 = 7 < p_2 = 11 < p_3 = 19, < \cdots < p_n$.

Considérer alors l'entier $N_n = 4p_1p_2 \ldots p_n + 3$.

Montrer que N_n est nécessairement divisible par l'un des entiers $p_0, p_1, \ldots, p_n$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\operatorname{pgcd}(3960, 2520) = 360$. L'équation équivaut à $7x - 11y = 18$.

La résoudre en utilisant une solution particulière de $7x - 11y = 1$.

Les solutions de l'équation initiale sont données par $\begin{cases} x = -54 + 11k \\ y = -36 + 7k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser $k\mathrm{C}_p^k = p\mathrm{C}_{p-1}^{k-1}$, et le théorème de Gauss.
2. Considérer la formule du binôme.
3. Utiliser une généralisation du résultat précédent.
4. Si n n'est pas un multiple de p, on trouve $n^{p-1} = 1 \pmod p$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Décomposer 56786730 en produit de facteurs premiers.

L'exercice précédent montre que pour tout p premier, $n^p - n$ et $m^p - m$ sont divisibles par p.