



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Soient a et b deux entiers.

Montrer que le système $\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$ possède des solutions et que celles-ci forment une classe d'entiers modulo mn .

2. Résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{9} \end{cases}$

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $N = 4k + 3$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $2520x - 3960y = 6480$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p - 1$, C_p^k est divisible par p .

2. En déduire que pour tous entiers a et b , $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

3. Montrer que pour tout entier n , $n^p \equiv n \pmod{p}$ (c'est le *petit théorème de Fermat*.)

4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tous entiers m et n , $N = mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Soient u, v dans \mathbb{Z} tels que $um + vn = 1$. Considérer $\alpha = vna + umb$.
Prouver ensuite que les solutions sont les $x = \alpha + kmn$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Ce système n'admet aucune solution (raisonner par l'absurde.)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Par l'absurde, on suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers de la forme $4k + 3$.

Nommons-les $p_0 = 3 < p_1 = 7 < p_2 = 11 < p_3 = 19, < \dots < p_n$.

Considérer alors l'entier $N_n = 4p_1p_2 \dots p_n + 3$.

Montrer que N_n est nécessairement divisible par l'un des entiers p_0, p_1, \dots, p_n .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On trouve $\text{pgcd}(3960, 2520) = 360$. L'équation équivaut à $7x - 11y = 18$.

La résoudre en utilisant une solution particulière de $7x - 11y = 1$.

Les solutions de l'équation initiale sont données par $\begin{cases} x = -54 + 11k \\ y = -36 + 7k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Utiliser $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$, et le théorème de Gauss.
2. Considérer la formule du binôme.
3. Utiliser une généralisation du résultat précédent.
4. Si n n'est pas un multiple de p , on trouve $n^{p-1} = 1 \pmod{p}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Décomposer 56786730 en produit de facteurs premiers.

L'exercice précédent montre que pour tout p premier, $n^p - n$ et $m^p - m$ sont divisibles par p .