



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

1. Trouver l'exposant dans la décomposition de $1000!$ en produits de facteurs premiers.
2. Généraliser avec l'exposant d'un entier premier p dans la décomposition de $n!$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient m et n deux entiers naturels, avec $m < n$, et tels que $m^n = n^m$.
Montrer que nécessairement $m = 2$ et $n = 4$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Trouver tous les entiers $0 \leq n \leq m$ tels que :
$$\begin{cases} \text{pgcd}(m, n) = m - n \\ \text{ppcm}(m, n) = 300 \end{cases}$$

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tous entiers m et n :
 $m^2 + n^2$ est divisible par 7 $\Leftrightarrow m$ et n sont divisibles par 7.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Quel est le plus petit entier naturel admettant exactement 15 diviseurs positifs ?



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Dans $\{1, \dots, 1000\}$, il y a 500 entiers pairs, 250 multiples de 4, 125 multiples de 8, etc.
L'exposant de 2 dans la décomposition de $1000!$ est 994.

2. Soit p premier, avec $2 \leq p \leq n$. L'exposant de p dans la décomposition de $n!$ est $\sum_{k=1}^m \left[\frac{n}{p^k} \right]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Remarquer qu'on peut supposer $m \geq 2$. Passer aux logarithmes, et étudier $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soit $d = \text{pgcd}(m, n)$, et m', n' tels que $m = dm'$ et $n = dn'$.

Prouver que $m' = n' + 1$ et $dn'(n' + 1) = 300$, et considérer les diviseurs de 300.

Parmi ces diviseurs, deux doivent être consécutifs.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Former le tableau des $k^2 \pmod{7}$, avec $0 \leq k \leq 6$.

Considérer alors la valeur modulo 7 des entiers $m^2 + n^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Calculer le nombre des diviseurs positifs d'un entier n , en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n . En déduire que la décomposition de l'entier n cherché est nécessairement de la forme $n = p^{14}$ ou $n = p^4 q^2$.