



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $x$  un élément nilpotent d'un anneau  $A$ .

Montrer que  $1 - x$  est inversible et donner son inverse en fonction de  $x$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $A = \{a + b\sqrt{2}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau intègre de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x = a + b\sqrt{2}$  de  $A$ , on pose  $N(x) = a^2 - 2b^2$ .

2. Montrer que pour tous  $x, y$  de  $A$ ,  $N(xy) = N(x)N(y)$ .

3. En déduire que  $x$  est inversible dans  $A \Leftrightarrow N(x) = \pm 1$ .

4. Montrer que les éléments  $\pm(1 + \sqrt{2})^n$  de  $A$  sont inversibles.

5. Réciproquement, on veut montrer que tout inversible  $x$  de  $A$  est de la forme précédente

(a) Montrer qu'on peut se ramener à supposer  $x = a + b\sqrt{2}$ , avec  $a \in \mathbb{N}^*$  et  $b \in \mathbb{N}$ .

(b) Montrer alors que  $x$  est de la forme  $(1 + \sqrt{2})^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$  et conclure.

Indication : si  $b \geq 1$ , considérer  $x_1 = \frac{x}{1 + \sqrt{2}}$ .