Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe et H une partie non vide de G, finie et stable.
Montrer que H est un sous-groupe de G.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

On considère les applications de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ dans lui-même, définies par :

$$\begin{cases} f_1(x) = x & f_2(x) = \dfrac{1}{1-x} & f_3(x) = \dfrac{x-1}{x} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x} & f_5(x) = 1 - x & f_6(x) = \dfrac{x}{x-1} \end{cases}$$

1. Montrer que ces six applications forment un groupe G pour la loi $\circ$.
2. Quels sont les sous-groupes de G ?

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow H \subset K$ ou $K \subset H$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G.
On note $HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$ et pareillement $KH = \{kh, k \in K, h \in H\}$.
Montrer que HK est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow HK = KH$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-groupes d'un groupe G.
On suppose que pour tous indices i et j il existe un indice k tel que $H_i \cup H_j \subset H_k$.
Montrer que $H = \bigcup H_i$ est un sous-groupe de G.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe fini d'ordre $2n$, avec $n \geq 2$.
On suppose qu'il existe deux sous-groupes H et K d'ordre n, tels que $H \cap K = \{e\}$.
Montrer que $n = 2$ et donner la table du groupe G.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout x de H, l'application $n \mapsto x^n$ ne peut pas être injective.

En déduire que e est dans H et que l'inverse de x est dans H.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Former la table des $f_i \circ f_j$.
2. Il y a un seul sous-groupe d'ordre 1, et un seul d'ordre 6.

   Il y a un seul sous-groupe d'ordre 3, et trois sous-groupes d'ordre 2.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $H \cup K$ est un sous-groupe et si $H \not\subset K$, se donner a tel que $a \in H, a \notin K$.

Pour tout x de K, considérer alors le produit xa.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Si HK est un sous-groupe, se donner x dans HK.

  En considérant x^{-1}, montrer que x est dans KH.

  Montrer de même l'inclusion $KH \subset HK$.

– Réciproquement si $HK = KH$, se donner $a = h_1k_1$ et $b = h_2k_2$ dans HK.

  Avec $b^{-1}a = k_2^{-1}h_2^{-1}h_1k_1$, prouver que $k_2^{-1}h_2^{-1}h_1$ est dans HK.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b dans H. Montrer qu'il existe k dans I tels que $a \in H_k$ et $b \in H_k$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Il existe a dans $G \setminus (H \cup K)$ tel que $G = H \cup K \cup \{a\}$.

Soit (x, y) dans $H \times K$ avec $x \neq y$. Prouver que $xy = yx = a$.

En déduire que $H - \{e\}$ et $K - \{e\}$ sont des singletons.

Donner alors la table du groupe G.