Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi multiplicative telle que :
$\forall\, a, b, c : a^2 = b^2, \quad ab^2 = a, \quad a^2(bc) = cb, \quad (ac)(bc) = ab.$
Montrer que E est un groupe pour la loi $\star$ définie par : $a \star b = a(b^2b)$.
Enoncer et prouver une réciproque.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

On définit la loi $\star$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $x \star y = x + y - xy$.

1. Etudier la loi $\star$. $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe ?
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, calculer $x^{(n)} = x \star x \star \cdots \star x$ (n fois).

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $]-1, 1[$, muni de la loi $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, est un groupe abélien.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. On suppose que $x \mapsto x^n$ est un morphisme de G (avec $n \in \mathbb{N}$).
Montrer que pour tout x de G, x^{n-1} commute avec tous les éléments de G.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $b^6 = e$, $ab = b^4a$.
Montrer que $b^3 = e$ et que $ab = ba$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Remarque : Les parenthèses sont nécessaires car on ne sait pas si la loi de E est associative.

En particulier, b^2b signifie $(bb)b$, qui peut être différent de $b(bb)$.

- Noter e l'élément tel $a^2 = e$ pour tout a.
  Constater que $e^2e = e^2 = e$. En déduire $a \star e = e \star a = a$.
- Montrer que $a \star (b \star c) = a\,((ec)b) = (a \star b) \star c$.
- Montrer que l'inverse de a pour la loi $\star$ est ea.
- Pour la réciproque : si $(G, \star)$ est un groupe de neutre e, définir la loi $xy = x \star y^{-1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a un neutre, mais que dire de $x = 1$?
2. Utiliser la factorisation de $1 - \varphi(x) \star \varphi(y)$, avec l'application $\varphi : t \mapsto 1 - t$.
3. Utiliser encore l'isomorphisme φ. On trouve $x^{(n)} = 1 - (1 - x)^n$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Factoriser $1 - x \star y$ et $1 + x \star y$ (la suite est facile).

Il y a une autre démonstration si on connait l'application th (tangente hyperbolique).

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y dans G. Montrer que $x^{n-1}y = yx^{n-1}$ en utilisant z tel que $y = z^n$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $ab^3 = a$. On peut aussi partir de $b = a^{-1}b^4a$.