

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble non vide muni d'une loi multiplicative telle que :

$$\forall a, b, c : a^2 = b^2, \quad ab^2 = a, \quad a^2(bc) = cb, \quad (ac)(bc) = ab.$$

Montrer que  $E$  est un groupe pour la loi  $\star$  définie par :  $a \star b = a(b^2b)$ .

Énoncer et prouver une réciproque.

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On définit la loi  $\star$  sur  $\mathbb{R}$  en posant :  $x \star y = x + y - xy$ .

1. Étudier la loi  $\star$ .  $(\mathbb{R}, \star)$  est-il un groupe ?
2. Montrer que  $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$  est un groupe abélien isomorphe à  $(\mathbb{R}^*, \times)$ .
3. Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , calculer  $x^{(n)} = x \star x \star \dots \star x$  ( $n$  fois).

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $] -1, 1[$ , muni de la loi  $x \star y = \frac{x + y}{1 + xy}$ , est un groupe abélien.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $G$  un groupe. On suppose que  $x \mapsto x^n$  est un morphisme de  $G$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ ).

Montrer que pour tout  $x$  de  $G$ ,  $x^{n-1}$  commute avec tous les éléments de  $G$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $a$  et  $b$  deux éléments d'un groupe  $G$  vérifiant :  $b^6 = e$ ,  $ab = b^4a$ .

Montrer que  $b^3 = e$  et que  $ab = ba$ .

## Indications ou résultats

### INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Remarque : Les parenthèses sont nécessaires car on ne sait pas si la loi de  $E$  est associative.

En particulier,  $b^2b$  signifie  $(bb)b$ , qui peut être différent de  $b(bb)$ .

– Noter  $e$  l'élément tel  $a^2 = e$  pour tout  $a$ .

Constater que  $e^2e = e^2 = e$ . En déduire  $a \star e = e \star a = a$ .

– Montrer que  $a \star (b \star c) = a((ec)b) = (a \star b) \star c$ .

– Montrer que l'inverse de  $a$  pour la loi  $\star$  est  $ea$ .

– Pour la réciproque : si  $(G, \star)$  est un groupe de neutre  $e$ , définir la loi  $xy = x \star y^{-1}$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a un neutre, mais que dire de  $x = 1$  ?

2. Utiliser la factorisation de  $1 - \varphi(x) \star \varphi(y)$ , avec l'application  $\varphi : t \mapsto 1 - t$ .

3. Utiliser encore l'isomorphisme  $\varphi$ . On trouve  $x^{(n)} = 1 - (1 - x)^n$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Factoriser  $1 - x \star y$  et  $1 + x \star y$  (la suite est facile).

Il y a une autre démonstration si on connaît l'application  $\text{th}$  (tangente hyperbolique).

### INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soient  $x, y$  dans  $G$ . Montrer que  $x^{n-1}y = yx^{n-1}$  en utilisant  $z$  tel que  $y = z^n$ .

### INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que  $ab^3 = a$ . On peut aussi partir de  $b = a^{-1}b^4a$ .