Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi multiplicative telle que :
$\forall\, a, b, c : a^2 = b^2, \quad ab^2 = a, \quad a^2(bc) = cb, \quad (ac)(bc) = ab.$
Montrer que E est un groupe pour la loi $\star$ définie par : $a \star b = a(b^2 b)$.
Enoncer et prouver une réciproque.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On définit la loi $\star$ sur $\mathbb{R}$ en posant : $x \star y = x + y - xy$.

1. Etudier la loi $\star$. $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe ?
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, \star)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, calculer $x^{(n)} = x \star x \star \cdots \star x$ (n fois).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $]-1, 1[$, muni de la loi $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, est un groupe abélien.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. On suppose que $x \mapsto x^n$ est un morphisme de G (avec $n \in \mathbb{N}$).
Montrer que pour tout x de G, x^{n-1} commute avec tous les éléments de G.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $b^6 = e$, $ab = b^4 a$.
Montrer que $b^3 = e$ et que $ab = ba$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Remarque : Les parenthèses sont nécessaires car on ne sait pas si la loi de E est associative.

En particulier, b^2b signifie $(bb)b$, qui peut être différent de $b(bb)$.

- Noter e l'élément tel $a^2 = e$ pour tout a.
  Constater que $e^2e = e^2 = e$. En déduire $a \star e = e \star a = a$.
- Montrer que $a \star (b \star c) = a\,((ec)b) = (a \star b) \star c$.
- Montrer que l'inverse de a pour la loi $\star$ est ea.
- Pour la réciproque : si $(G, \star)$ est un groupe de neutre e, définir la loi $xy = x \star y^{-1}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a un neutre, mais que dire de $x = 1$?
2. Utiliser la factorisation de $1 - \varphi(x) \star \varphi(y)$, avec l'application $\varphi : t \mapsto 1 - t$.
3. Utiliser encore l'isomorphisme φ. On trouve $x^{(n)} = 1 - (1 - x)^n$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Factoriser $1 - x \star y$ et $1 + x \star y$ (la suite est facile).

Il y a une autre démonstration si on connait l'application th (tangente hyperbolique).

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y dans G. Montrer que $x^{n-1}y = yx^{n-1}$ en utilisant z tel que $y = z^n$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $ab^3 = a$. On peut aussi partir de $b = a^{-1}b^4a$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 6 pages.