Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. Pour tout a de G on pose $\varphi_a(x) = axa^{-1}$.

Montrer que l'application $a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupe de G dans le groupe des automorphismes de G. Quel en est le noyau ?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe fini d'ordre n. Soit k un entier premier avec n.

Montrer que l'application $x \to x^k$ est une bijection de G sur lui-même.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que tout groupe d'ordre 4 est commutatif.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

La table suivante définit-elle un groupe ?

$\star$	e	x	y	z	t
e	e	x	y	z	t
x	x	e	t	y	z
y	y	z	e	t	x
z	z	t	x	e	y
t	t	y	z	x	e

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient a et b deux éléments d'un groupe G vérifiant : $a^5 = e$ et $ab = ba^3$.

Montrer que $a^2b = ba$ et que $ab^3 = b^3a^2$.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que :

$\forall\, i \in \{k, k+1, k+2\},\ \forall\, a, b \in G,\ (ab)^i = a^i b^i$.

Montrer que G est un groupe abélien.