

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $x, y$  deux éléments d'un groupe  $G$  tels que :  $(xy)^{-1} = x^{-1}y$  et  $(yx)^{-1} = y^{-1}x$ .

Montrer que  $(x^2)^{-1} = y^2$  et  $x^4 = y^4 = e$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $G$  un groupe. Montrer que l'application  $x \mapsto x^{-1}$  est un morphisme  $\Leftrightarrow$  la loi de  $G$  est commutative.

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $(G, \star)$  un groupe abélien (on note  $e$  le neutre et  $a'$  le symétrique de  $a$ ).

Soit  $\alpha$  un élément de  $G$ , différent de  $e$ .

On définit une loi  $\mathcal{T}$  en posant :  $\forall a, b \in G, a\mathcal{T}b = a \star b \star \alpha$ .

Montrer que  $(G, \mathcal{T})$  est un groupe abélien.

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que  $\mathbb{R}$ , muni de la loi  $x \star y = (x^3 + y^3)^{1/3}$  est un groupe.

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $G$  un ensemble non vide muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :

$\forall (a, b) \in G^2, \exists (x, y) \in G^2, b = ax = ya$ .

Montrer que  $G$  est un groupe.

**EXERCICE 6** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $G$  un ensemble fini non vide muni d'une loi  $\star$  associative.

On suppose que tout élément de  $G$  est régulier (simplifiable).

Montrer que  $G$  est un groupe.