Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soient x, y deux éléments d'un groupe G tels que : $(xy)^{-1} = x^{-1}y$ et $(yx)^{-1} = y^{-1}x$.
Montrer que $(x^2)^{-1} = y^2$ et $x^4 = y^4 = e$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit G un groupe. Montrer que l'application $x \mapsto x^{-1}$ est un morphisme $\Leftrightarrow$ la loi de G est commutative.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit $(G, \star)$ un groupe abélien (on note e le neutre et a' le symétrique de a).
Soit α un élément de G, différent de e.
On définit une loi $\mathcal{T}$ en posant : $\forall\, a, b \in G,\ a\mathcal{T}b = a \star b \star \alpha$.
Montrer que $(G, \mathcal{T})$ est un groupe abélien.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\mathbb{R}$, muni de la loi $x \star y = (x^3 + y^3)^{1/3}$ est un groupe.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi associative (notée multiplicativement) telle que :
$\forall\, (a, b) \in G^2,\ \exists\, (x, y) \in G^2,\ b = ax = ya$.
Montrer que G est un groupe.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit G un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative.
On suppose que tout élément de G est régulier (simplifiable).
Montrer que G est un groupe.