

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition \star , associative et commutative.

On suppose de plus que pour tout x de E , $x \star x = x$.

1. Donner des exemples d'une telle situation.
2. Montrer que $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \star y = y$ définit une relation d'ordre sur E .
3. Montrer alors que pour tous éléments x, y de E , $\sup\{x, y\} = x \star y$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi associative, notée multiplicativement.

Montrer que pour tout a de E , il existe un entier m tel que $x = a^m$ soit idempotent ($x^2 = x$).

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné muni d'une loi \star telle que :

$$\forall (a, b, x) \in E^3, \begin{cases} a \star b \leq a, & a \star b \leq b \\ (x \leq a) \text{ et } (x \leq b) \Rightarrow x \leq a \star b \end{cases}$$

1. Montrer que la loi \star est commutative.
2. Prouver que pour tout a de E , $a \star a = a$.
3. Vérifier que $\begin{cases} a \leq b \Rightarrow a \star c \leq b \star c \\ (a \leq b) \text{ et } (c \leq d) \Rightarrow a \star c \leq b \star d \end{cases}$
4. Montrer que la loi \star est associative.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble muni d'une loi \star associative. Pour tout a de E , on définit les applications g_a et d_a de E dans E : $\forall x \in E$, $d_a(x) = x \star a$ et $g_a(x) = a \star x$.

1. Montrer que s'il existe a dans E tel que g_a et d_a soient surjectives, alors E possède un élément neutre pour la loi \star .
2. Montrer que si pour tout a de E les applications g_a et d_a sont surjectives, alors tout élément de E possède un inverse pour la loi \star .

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. $E = \mathcal{P}(F)$ avec la loi "réunion" ou la loi "intersection".
2. – La réflexivité est évidente.
– Utiliser la commutativité de la loi \star pour prouver l'antisymétrie de \mathcal{R} .
– Utiliser l'associativité de la loi \star pour prouver la transitivité de \mathcal{R} .
3. Prouver que $x \star y$ est un majorant de $\{x, y\}$.
Enfin si z est un majorant de x et y , prouver que z est un majorant de $x \star y$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Prouver l'existence de deux entiers $p < q$ tels $a^q = a^p$.

Montrer que la suite des a^n devient périodique.

En déduire l'existence d'un entier m tel que $a^{2m} = a^m$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Pour tous a, b de E , montrer que $b \star a \leq a \star b$.
Par un argument de symétrie, en déduire que la loi \star est commutative.
2. Pour tout a de E , vérifier que $a \star a \leq a$ et $a \leq a \star a$.
3. Soient a, b, c dans E , avec $a \leq b$. Vérifier que $a \star c \leq b \star c$.
4. Soient a, b, c dans E . Vérifier que $(a \star b) \star c \leq a$ et $(a \star b) \star c \leq b$.
En déduire $(a \star b) \star c \leq a \star (b \star c)$.
Conclure en utilisant la commutativité de la loi \star .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Justifier l'existence e, f tels que $e \star a = a$ et $a \star f = a$.
Pour tout x de E , utiliser y, z dans E tels que $y \star a = x$ et $a \star z = x$ pour montrer que $x \star f = x$ et $e \star x = x$. Montrer que $e = f$. Ainsi e est le neutre. . .
2. Soit a dans E . Justifier l'existence de a', a'' tels que $a' \star a = e$ et $a \star a'' = e$.
En déduire que $a' = a''$ est l'inverse de a .