Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni d'une loi associative notée multiplicativement.
Pour tout a de E, on note $aEa = \{axa, x \in E\}$.
On suppose qu'il existe un élément a de E tel que $aEa = E$.
Montrer que E possède un élément neutre.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition $\star$
On suppose qu'il existe deux éléments a et b dans E tels que, pour tous x, y :

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } a \text{ est régulier à gauche)} \\ x \star b = y \star b \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } b \text{ est régulier à droite)} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe e et f dans E tels que $a \star e = a$ et $f \star b = b$.
2. Montrer que pour tout x de E, $e \star x = x$ et $x \star f = x$.
3. Montrer que $e = f$, et que cet élément est neutre pour la loi $\star$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Sur l'ensemble de toutes les relations binaires sur E on définit la loi $\star$ par :
Pour toutes relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, la relation $\mathcal{T} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$ est telle que

$$\forall\, x, y \in E, \quad x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists\, z \in E, x\mathcal{R}z \text{ et } z\mathcal{S}y$$

Montrer que la loi $\star$ est associative.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $x \star y = x + y + \sin(xy)$.

1. Cette loi est-elle commutative ? Existe-t-il un élément neutre ?
2. Montrer qu'il existe des éléments de $\mathbb{R}$ admettant plusieurs inverses.
3. En déduire que $\star$ n'est pas associative.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Combien y-a-t-il de lois de composition sur un ensemble à n éléments ?
Combien de ces lois sont-elles commutatives ?

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Il existe b dans E tel que $aba = a$.

Pour tout x de E, il existe y dans E tel que $aya = x$.

Montrer que $x(ba) = x$ et $(ab)x = x$. Prouver enfin que $ab = ba$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. Prouver que les applications $g_a : x \mapsto a \star x$ et $d_b : x \mapsto x \star b$ sont bijectives.
   En déduire l'existence de e et f tels que $a \star e = a$ et $f \star b = b$.
2. Pour tout x de E, montrer que $e \star x = x$ et $x \star f = x$.
3. Prouver que $e = f$. Conclusion ?

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations sur E. Poser $\mathcal{U} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$ et $\mathcal{V} = \mathcal{S} \star \mathcal{T}$.

Soient a, b deux éléments quelconques de E. Montrer que $a\,(\mathcal{U} \star \mathcal{T})\,b \Leftrightarrow a\,(\mathcal{R} \star \mathcal{V})\,b$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. La loi $\star$ est commutative, et 0 est neutre.
2. Montrer par exemple que $a = 4$ possède trois inverses distincts.
3. Exhiber trois éléments x, y, z tels que $x \star (y \star z) \neq (x \star y) \star z$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a donc n^{n^2} lois sur E.
2. Il y a $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ lois commutatives sur E.