

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi associative notée multiplicativement.

Pour tout  $a$  de  $E$ , on note  $aEa = \{axa, x \in E\}$ .

On suppose qu'il existe un élément  $a$  de  $E$  tel que  $aEa = E$ .

Montrer que  $E$  possède un élément neutre.

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble fini muni d'une loi de composition  $\star$

On suppose qu'il existe deux éléments  $a$  et  $b$  dans  $E$  tels que, pour tous  $x, y$  :

$$\begin{cases} a \star x = a \star y \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } a \text{ est régulier à gauche)} \\ x \star b = y \star b \Rightarrow x = y & \text{(on dit que } b \text{ est régulier à droite)} \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe  $e$  et  $f$  dans  $E$  tels que  $a \star e = a$  et  $f \star b = b$ .
2. Montrer que pour tout  $x$  de  $E$ ,  $e \star x = x$  et  $x \star f = x$ .
3. Montrer que  $e = f$ , et que cet élément est neutre pour la loi  $\star$ .

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Sur l'ensemble de toutes les relations binaires sur  $E$  on définit la loi  $\star$  par :

Pour toutes relations  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{S}$ , la relation  $\mathcal{T} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$  est telle que

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{T}y \Leftrightarrow \exists z \in E, x\mathcal{R}z \text{ et } z\mathcal{S}y$$

Montrer que la loi  $\star$  est associative.

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On définit sur  $\mathbb{R}$  la loi  $x \star y = x + y + \sin(xy)$ .

1. Cette loi est-elle commutative ? Existe-t-il un élément neutre ?
2. Montrer qu'il existe des éléments de  $\mathbb{R}$  admettant plusieurs inverses.
3. En déduire que  $\star$  n'est pas associative.

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Combien y-a-t-il de lois de composition sur un ensemble à  $n$  éléments ?

Combien de ces lois sont-elles commutatives ?

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Il existe  $b$  dans  $E$  tel que  $aba = a$ .

Pour tout  $x$  de  $E$ , il existe  $y$  dans  $E$  tel que  $aya = x$ .

Montrer que  $x(ba) = x$  et  $(ab)x = x$ . Prouver enfin que  $ab = ba$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Prouver que les applications  $g_a : x \mapsto a \star x$  et  $d_b : x \mapsto x \star b$  sont bijectives.

En déduire l'existence de  $e$  et  $f$  tels que  $a \star e = a$  et  $f \star b = b$ .

2. Pour tout  $x$  de  $E$ , montrer que  $e \star x = x$  et  $x \star f = x$ .

3. Prouver que  $e = f$ . Conclusion ?

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Soient  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  trois relations sur  $E$ . Poser  $\mathcal{U} = \mathcal{R} \star \mathcal{S}$  et  $\mathcal{V} = \mathcal{S} \star \mathcal{T}$ .

Soient  $a, b$  deux éléments quelconques de  $E$ . Montrer que  $a(\mathcal{U} \star \mathcal{T})b \Leftrightarrow a(\mathcal{R} \star \mathcal{V})b$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. La loi  $\star$  est commutative, et 0 est neutre.

2. Montrer par exemple que  $a = 4$  possède trois inverses distincts.

3. Exhiber trois éléments  $x, y, z$  tels que  $x \star (y \star z) \neq (x \star y) \star z$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Il y a donc  $n^{n^2}$  lois sur  $E$ .

2. Il y a  $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$  lois commutatives sur  $E$ .