Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble muni de deux lois $\star$ et $\bullet$
On suppose que e est neutre pour la loi $\star$ et que f est neutre pour la loi $\bullet$
On suppose enfin que : $\forall (x, y, u, v) \in E^4$, $(x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$

1. Montrer que $e = f$.
2. Prouver que les lois $\star$ et $\bullet$ sont identiques.
3. Montrer que cette loi est commutative et associative.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{R}$ on définit la loi $\star$ par : $x \star y = kxy + k'(x + y)$, où k et k' sont deux réels.
A quelle condition sur k et k' cette loi est-elle associative ?

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Etudier la loi $\star$, définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\begin{cases} \text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } A \star B = A \cup B \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ alors } A \star B = E \end{cases}$

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Etudier la loi $\star$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A \star B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition associative notée $\star$
On suppose également que E possède un neutre e pour la loi $\star$

1. Montrer que si un élément a de E est régulier (simplifiable) alors il est inversible.
2. Vérifier sur un exemple que ce n'est plus vrai si on ne suppose pas que E est fini.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Poser $x = v = e$ et $y = u = f$.
2. Poser $y = u = e$, et laisser x, v quelconques.
3. Pour l'associativité, choisir $y = e$, les trois autres étant quelconques.
   Pour la commutativité, poser $x = v = e$, les deux autres étant quelconques.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On remarque que la loi $\star$ est commutative.
La loi $\star$ est associative $\Leftrightarrow k' \in \{0, 1\}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

– La commutativité est évidente. $\emptyset$ est neutre, et il est le seul élément inversible.
– La loi $\star$ est associative (discuter selon que l'intersection de A avec B et C est vide ou non).

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– La loi $\star$ est commutative, et E est neutre.
– Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est son propre symétrique.
– On trouve $(A \star B) \star C(A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B \cup C)$.
  La loi $\star$ est associative.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que si a est régulier, les applications $\begin{cases} d_a : x \mapsto x \star a \\ g_a : x \mapsto a \star x \end{cases}$ sont bijectives.
   En déduire l'existence de a', a'' tels que $a' \star a = a \star a'' = e$, puis montrer que $a' = a''$.
2. Considérer $\mathbb{Z}$ muni de la multiplication.