

## Énoncés des exercices

### EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble muni de deux lois  $\star$  et  $\bullet$

On suppose que  $e$  est neutre pour la loi  $\star$  et que  $f$  est neutre pour la loi  $\bullet$

On suppose enfin que :  $\forall (x, y, u, v) \in E^4, (x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$

1. Montrer que  $e = f$ .
2. Prouver que les lois  $\star$  et  $\bullet$  sont identiques.
3. Montrer que cette loi est commutative et associative.

### EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Sur  $\mathbb{R}$  on définit la loi  $\star$  par :  $x \star y = kxy + k'(x + y)$ , où  $k$  et  $k'$  sont deux réels.

A quelle condition sur  $k$  et  $k'$  cette loi est-elle associative ?

### EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Etudier la loi  $\star$ , définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } A \star B = A \cup B \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ alors } A \star B = E \end{array} \right.$

### EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Etudier la loi  $\star$  définie sur  $\mathcal{P}(E)$  par :  $A \star B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ .

### EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $E$  un ensemble fini muni d'une loi de composition associative notée  $\star$

On suppose également que  $E$  possède un neutre  $e$  pour la loi  $\star$

1. Montrer que si un élément  $a$  de  $E$  est régulier (simplifiable) alors il est inversible.
2. Vérifier sur un exemple que ce n'est plus vrai si on ne suppose pas que  $E$  est fini.

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Poser  $x = v = e$  et  $y = u = f$ .
2. Poser  $y = u = e$ , et laisser  $x, v$  quelconques.
3. Pour l'associativité, choisir  $y = e$ , les trois autres étant quelconques.  
Pour la commutativité, poser  $x = v = e$ , les deux autres étant quelconques.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

On remarque que la loi  $\star$  est commutative.

La loi  $\star$  est associative  $\Leftrightarrow k' \in \{0, 1\}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

- La commutativité est évidente.  $\emptyset$  est neutre, et il est le seul élément inversible.
- La loi  $\star$  est associative (discuter selon que l'intersection de  $A$  avec  $B$  et  $C$  est vide ou non).

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

- La loi  $\star$  est commutative, et  $E$  est neutre.
- Tout élément de  $\mathcal{P}(E)$  est son propre symétrique.
- On trouve  $(A \star B) \star C = (A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B \cup C)$ .

La loi  $\star$  est associative.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Montrer que si  $a$  est régulier, les applications  $\begin{cases} d_a : x \mapsto x \star a \\ g_a : x \mapsto a \star x \end{cases}$  sont bijectives.

En déduire l'existence de  $a', a''$  tels que  $a' \star a = a \star a'' = e$ , puis montrer que  $a' = a''$ .

2. Considérer  $\mathbb{Z}$  muni de la multiplication.