

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble muni de deux lois \star et \bullet

On suppose que e est neutre pour la loi \star et que f est neutre pour la loi \bullet

On suppose enfin que : $\forall (x, y, u, v) \in E^4, (x \star y) \bullet (u \star v) = (x \bullet u) \star (y \bullet v)$

1. Montrer que $e = f$.
2. Prouver que les lois \star et \bullet sont identiques.
3. Montrer que cette loi est commutative et associative.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Sur \mathbb{R} on définit la loi \star par : $x \star y = kxy + k'(x + y)$, où k et k' sont deux réels.

A quelle condition sur k et k' cette loi est-elle associative ?

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la loi \star , définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } A \cap B = \emptyset, \text{ alors } A \star B = A \cup B \\ \text{Si } A \cap B \neq \emptyset, \text{ alors } A \star B = E \end{array} \right.$

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la loi \star définie sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A \star B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition associative notée \star

On suppose également que E possède un neutre e pour la loi \star

1. Montrer que si un élément a de E est régulier (simplifiable) alors il est inversible.
2. Vérifier sur un exemple que ce n'est plus vrai si on ne suppose pas que E est fini.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Poser $x = v = e$ et $y = u = f$.
2. Poser $y = u = e$, et laisser x, v quelconques.
3. Pour l'associativité, choisir $y = e$, les trois autres étant quelconques.
Pour la commutativité, poser $x = v = e$, les deux autres étant quelconques.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On remarque que la loi \star est commutative.

La loi \star est associative $\Leftrightarrow k' \in \{0, 1\}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

- La commutativité est évidente. \emptyset est neutre, et il est le seul élément inversible.
- La loi \star est associative (discuter selon que l'intersection de A avec B et C est vide ou non).

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- La loi \star est commutative, et E est neutre.
- Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est son propre symétrique.
- On trouve $(A \star B) \star C = (A \cup \overline{B} \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup C) \cap (A \cup B \cup C)$.

La loi \star est associative.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Montrer que si a est régulier, les applications $\begin{cases} d_a : x \mapsto x \star a \\ g_a : x \mapsto a \star x \end{cases}$ sont bijectives.

En déduire l'existence de a', a'' tels que $a' \star a = a \star a'' = e$, puis montrer que $a' = a''$.

2. Considérer \mathbb{Z} muni de la multiplication.