Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{8 + \dfrac{u_n^2}{2}}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par par $u_0 > 0$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2u_n}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \dfrac{1}{14}(3u_n^3 - 3u_n^2 - 4u_n)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On définit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} (x-4)/2 & \text{sur }]-\infty, -2] \\ 3(x+1) & \text{sur } [-2, -1] \\ 2(x+1)/3 & \text{sur } [-1, +\infty[\end{cases}$

On définit une suite (u_n) par la donnée de u_0 et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
Etudier la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit a un réel strictement positif, différent de 1.
On définit une suite (u_n) de la manière suivante :
- u_0 est strictement compris entre a et 1.
- Pour tout entier n, $u_{n+1} = 1 + a - \dfrac{a}{u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout entier n, le réel u_n est strictement compris entre a et 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, u_n est défini et positif. La seule limite finie possible u est $\ell = 4$.

On discute suivant la position de u_0 par rapport à 0 et 4. Dans tous les cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Considérer $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$. La seule limite finie possible est $\ell = \dfrac{3}{2}$.

On est amené à considérer $a_n = u_{2n}$, $b_n = u_{2n+1}$, et $g = f \circ f$.

On prouve que les suites de terme général a_n et b_n sont adjacentes.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On considère $f(x) = \dfrac{1}{14}(3x^3 - 3x^2 - 4x)$, et on factorise $f(x) - x$.

Les seules limites finies *possibles* de la suite u sont -2, 0, et 3.

Des trois points fixes, seul 0 est “attractif”. Les deux autres sont “répulsifs”.

On discute suivant la position de u_0 par rapport à -2, 0 et 3 :

- Si $-2 < u_0 < 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 \in \{-2, 3\}$, la suite est constante.
- Si $u_0 < -2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $u_0 > 3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

L'application f est affine par morceaux. Tracer $y = f(x)$, et comparer $f(x)$ à x.

Il y a trois limites finies *possibles* : -4, $-\frac{3}{2}$ et 2.

- Si $u_0 < -\frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4$.
- Si $u_0 = -\frac{3}{2}$ alors la suite u est constante.
- Si $u_0 > -\frac{3}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

1. Procéder par récurrence.
2. Les seules limites finies *possibles* de la suite u sont 1 et a.

   La suite u est croissante et bornée, donc…

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, il est clair que u_n est défini et positif.

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}}$.

L'application f étant paire, on peut se contenter d'étudier le cas où $u_0 \geq 0$.

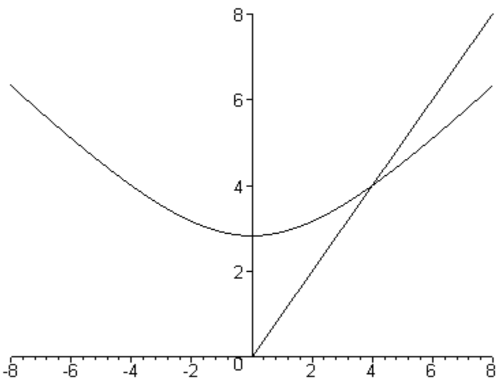
L'application f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) - x = \sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} - x = \dfrac{1}{2}\dfrac{16 - x^2}{\sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} + x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(4-x)(4+x)}{\sqrt{8 + \dfrac{x^2}{2}} + x}$.

On en déduit le signe de $f(x) - x$, et l'équivalence $f(x) = x \Leftrightarrow x = 4$.

La seule limite finie possible de la suite u est donc $\ell = 4$.

Voici la courbe $y = f(x)$, avec la bissectrice $y = x$.



On peut alors conclure suivant la valeur de u_0.

- Si $0 \leq u_0 < 4$: Pour tout x de $[0, 4[$, on a $0 \leq x < f(x) < 4$.
  En particulier $0 \leq u_0 < u_1 < 4$ et $0 \leq u_1 < u_2 < 4$.
  Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \geq 0, 0 \leq u_n < u_{n+1} < 4$.
  La suite u, croissante et majorée, converge vers 4 (seule limite possible).
- Si $u_0 = 4$: La suite u est constante : $\forall n \geq 0, u_n = 4$.
- Si $4 < u_0$: Pour tout x de $]4, +\infty[$, on a $4 < f(x) < x$.
  En particulier $4 < u_1 < u_0$ et $4 < u_2 < u_1$.
  Une récurrence évidente donne alors : $\forall n \geq 0, 4 < u_{n+1} < u_n$.
  La suite u, décroissante et minorée, converge vers 4 (seule limite possible).
- Si $u_0 \leq 0$: On a alors $u_1 \geq 0$ et on est ramené aux cas précédents.
- Conclusion : Dans tous les cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.