Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq -\frac{1}{2}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a}{u_n})$, où $a > 0$ est donné.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{-1+u_n}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par u_0 réel et $u_{n+1} = u_n(1+u_n)$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.

La seule limite finie *possible* de la suite u est $\ell = -1$.

La discussion fait apparaître les cas $u_0 < -1$, $\quad u_0 = -1$, $\quad -1 < u_0 < -\frac{1}{2}$, $\quad -\frac{1}{2} < u_0$.

Dans les trois premiers cas, la limite est -1. Dans le dernier, elle est égale à $+\infty$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

La seule limite finie *possible* est $\ell = \sqrt{a}$.

Dans tous les cas, la suite converge vers $\sqrt{a}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

La seule limite finie *possible* de la suite u est $\ell = -1$.

On étudie la suite u, suivant les valeurs de u_0.

- Si $u_0 < -1$, la suite u est croissante et majorée : elle converge $\ell = -1$.
- Si $u_0 = -1$, la suite u est constante.
- Si $-1 < u_0 < 0$, la suite u est décroissante et minorée : elle converge vers -1.
- Si $u_0 = 0$, on a $u_1 = -1$ donc...
- Si $0 < u_0 < 1$, on est donc ramené au premier cas.
- Si $u_0 > 1$, la suite u est croissante et tend vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Étudier $f(x) = 2 + \ln x$, et $g(x) = f(x) - x$.

Il y a deux limites réelles *possibles* $\alpha \approx 0.1585943396$ et $\beta \approx 3.146193221$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à α et β.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

La suite u est croissante. La seule limite finie *possible* est $\ell = 0$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à 0 et -1.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

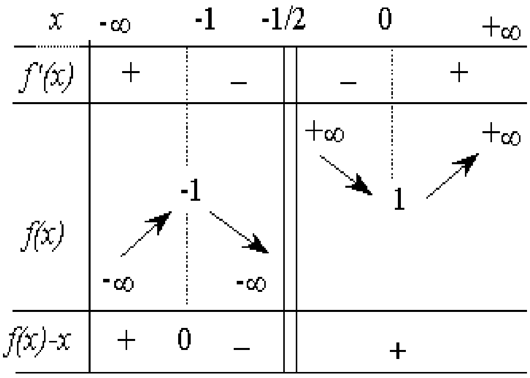
La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x + \dfrac{1+x}{1+2x}$.

On commence par étudier l'application f.

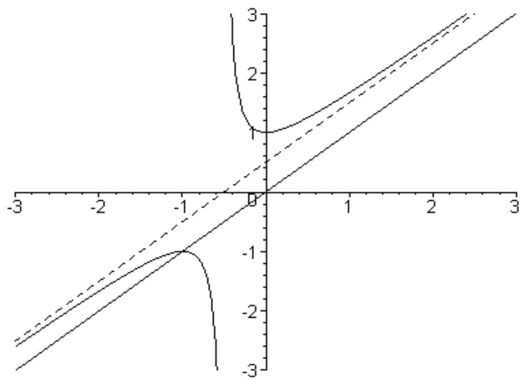
On a $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$: la seule limite finie *possible* de la suite u est donc $\ell = -1$.

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+2x)^2} = 4\dfrac{x(x+1)}{(1+2x)^2}$.

On en déduit le tableau de variations de f (avec le signe de $f(x) - x = \dfrac{1+x}{1+2x}$) :



Voici la courbe représentative de f (avec l'asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ et la bissectrice $y = x$) :



On constate que $x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \neq -\frac{1}{2}$.

Puisque $u_0 \neq -\frac{1}{2}$, cela signifie que la suite (u_n) est entièrement définie.

On peut maintenant étudier la suite u, suivant les valeurs de u_0.

– Si $u_0 < -1$.

  Pour tout $x < -1$, on a $x < f(x) < -1$.