



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq -\frac{1}{2}$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$, où $a > 0$ est donné.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \neq 1$ et la relation $u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{-1 + u_n}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 2 + \ln u_n$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier la suite (u_n) définie par u_0 réel et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = x + \frac{1+x}{1+2x}$.

La seule limite finie possible de la suite u est $\ell = -1$.

La discussion fait apparaître les cas $u_0 < -1$, $u_0 = -1$, $-1 < u_0 < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < u_0$.

Dans les trois premiers cas, la limite est -1 . Dans le dernier, elle est égale à $+\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

La seule limite finie possible est $\ell = \sqrt{a}$.

Dans tous les cas, la suite converge vers \sqrt{a} .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On étudie l'application $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

La seule limite finie possible de la suite u est $\ell = -1$.

On étudie la suite u , suivant les valeurs de u_0 .

- Si $u_0 < -1$, la suite u est croissante et majorée : elle converge $\ell = -1$.
- Si $u_0 = -1$, la suite u est constante.
- Si $-1 < u_0 < 0$, la suite u est décroissante et minorée : elle converge vers -1 .
- Si $u_0 = 0$, on a $u_1 = -1$ donc...
- Si $0 < u_0 < 1$, on est donc ramené au premier cas.
- Si $u_0 > 1$, la suite u est croissante et tend vers $+\infty$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Étudier $f(x) = 2 + \ln x$, et $g(x) = f(x) - x$.

Il y a deux limites réelles possibles $\alpha \approx 0.1585943396$ et $\beta \approx 3.146193221$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à α et β .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

La suite u est croissante. La seule limite finie possible est $\ell = 0$.

Discuter suivant la position de u_0 par rapport à 0 et -1 .

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

La suite u est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x + \frac{1+x}{1+2x}$.

On commence par étudier l'application f .

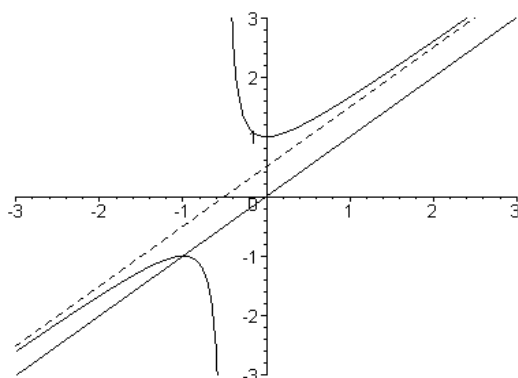
On a $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$: la seule limite finie possible de la suite u est donc $\ell = -1$.

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(1+2x)^2} = 4 \frac{x(x+1)}{(1+2x)^2}$.

On en déduit le tableau de variations de f (avec le signe de $f(x) - x = \frac{1+x}{1+2x}$) :

x	$-\infty$	-1	$-1/2$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f(x)-x$	+	0	-		+

Voici la courbe représentative de f (avec l'asymptote $y = x + \frac{1}{2}$ et la bissectrice $y = x$) :



On constate que $x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \neq -\frac{1}{2}$.

Puisque $u_0 \neq -\frac{1}{2}$, cela signifie que la suite (u_n) est entièrement définie.

On peut maintenant étudier la suite u , suivant les valeurs de u_0 .

– Si $u_0 < -1$.

Pour tout $x < -1$, on a $x < f(x) < -1$.