Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit une suite (u_n) telle que, pour tout $n \geq 2$, $(n+1)^2u_{n+1} - (n-1)^2u_n + n = 0$ (E).

1. Montrer qu'il existe un réel k tel que si on pose $v_n = u_n - k$ alors pour tout $n \geq 2$: $(n+1)^2v_{n+1} - (n-1)^2v_n = 0$.
2. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.
3. Que se passe-t-il si la relation (E) est vraie pour $n = 1$?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 > 0, v_0 > 0)$ et par les relations de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Etudier la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Il faut poser $v_n = u_n + \dfrac{1}{4}$.
2. Pour $n \geq 2$, $v_n = \dfrac{4v_2}{n^2(n-1)^2}$ et $u_n = -\dfrac{1}{4} + v_n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\dfrac{1}{4}$.
3. Pour tout $n \geq 2$ on a alors $u_n = -\dfrac{1}{4}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

La suite de terme général $d_n = v_n - u_n$ est constante. Posons $\lambda = v_0 - u_0$ et $\mu = \dfrac{v_0}{u_0}$.
- Si $u_0 = v_0$, alors $u_n = v_n = \dfrac{u_0}{2^n}$ pour tout n. La limite commune est 0.
- Si $0 < v_0 < u_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu^{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\lambda > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- Si $0 < u_0 < v_0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu^{2^n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lambda > 0$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de calculer u_3 pour comprendre...

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

La seule limite finie possible est $\ell = 7$.

Comparer $|u_{n+1} - 7|$ et $|u_n - 7|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 7$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

La suite u est définie si $-132 \leq u_0 \leq 12$.

La seule limite finie possible de la suite u est $\ell = 3$.

Comparer $|u_{n+1} - 3|$ et $\frac{1}{3}|u_n - 3|$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.