Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite bornée telle que : $\forall n \geq 1,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$.
Montrer que cette suite est convergente.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{kn}$ (où k est un entier donné supérieur ou égal à 2) est convergente.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On considère la suite de terme général $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$.
Montrer que pour tout n, $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n$.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On se donne une suite réelle (u_n) et on pose $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{\infty} v_n = \ell$.
2. Vérifier sur un exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la réciproque est vraie.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit p_n la probabilité d'obtenir exactement n fois pile en $2n$ lancers d'une pièce équilibrée.
Calculer p_n et déterminer $\lim\limits_{\infty} p_n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$ est croissante et bornée.

Soit ℓ sa limite. Discuter suivant le signe de ℓ.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que la suite (u_n) est croissante, ensuite que $u_n \leq k - 1$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La suite (u_n) est croissante. On vérifie $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n$ donc $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n \leq 1 + \sqrt{2}\, u_{n+1}$.

Autrement dit, pour tout $n \geq 1$, on a $P(u_n) \leq 0$ avec $P(x) = x^2 - x\sqrt{2} - 1\ldots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. – On traite d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $n > m \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.
     On en déduit l'existence de $p > m$ tel que $n \geq p \Rightarrow |v_n| \leq 2\varepsilon$.
   – Le cas $\ell \in \mathbb{R}$ se ramène au précédent par une translation.
   – Si $\ell = +\infty$, soit $A > 0$ quelconque. Il existe m tel que $n > m \Rightarrow u_n \geq A$.
     On en déduit $p > m$ tel que $n \geq p \Rightarrow v_n \geq \frac{A}{2}$.
   – Le cas $\ell = -\infty$ se traite par changement de signe.
2. Penser à la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.
3. La suite u a maintenant une limite, finie ou infinie, et on se ramène au début de l'exercice.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve $p_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}$. C'est une suite décroissante minorée. Soit ℓ sa limite.

On vérifie que $\ln p_{2n} - \ln p_n \leq n \ln\left(1 - \frac{1}{4n}\right)$. Dans ces conditions, conclure que $\ell = 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.