

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $(u_n)$  une suite bornée telle que :  $\forall n \geq 1, 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$ .

Montrer que cette suite est convergente.

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que la suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn}$  (où  $k$  est un entier donné supérieur ou égal à 2) est convergente.

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère la suite de terme général  $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{n}}}}$ .

Montrer que pour tout  $n, u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2} u_n$ .

La suite  $(u_n)$  est-elle convergente ?

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne une suite réelle  $(u_n)$  et on pose  $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ .

1. Montrer que si  $\lim_{\infty} u_n = \ell$  alors  $\lim_{\infty} v_n = \ell$ .
2. Vérifier sur un exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si la suite  $(u_n)$  est monotone, alors la réciproque est vraie.

**EXERCICE 5** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $p_n$  la probabilité d'obtenir exactement  $n$  fois pile en  $2n$  lancers d'une pièce équilibrée.

Calculer  $p_n$  et déterminer  $\lim_{\infty} p_n$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite de terme général  $w_n = u_{n+1} - u_n$  est croissante et bornée.

Soit  $\ell$  sa limite. Discuter suivant le signe de  $\ell$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que la suite  $(u_n)$  est croissante, ensuite que  $u_n \leq k - 1$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La suite  $(u_n)$  est croissante. On vérifie  $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2} u_n$  donc  $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2} u_n \leq 1 + \sqrt{2} u_{n+1}$ .

Autrement dit, pour tout  $n \geq 1$ , on a  $P(u_n) \leq 0$  avec  $P(x) = x^2 - x\sqrt{2} - 1 \dots$

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. – On traite d'abord  $\ell = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $n > m \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$ .  
On en déduit l'existence de  $p > m$  tel que  $n \geq p \Rightarrow |v_n| \leq 2\varepsilon$ .  
– Le cas  $\ell \in \mathbb{R}$  se ramène au précédent par une translation.  
– Si  $\ell = +\infty$ , soit  $A > 0$  quelconque. Il existe  $m$  tel que  $n > m \Rightarrow u_n \geq A$ .  
On en déduit  $p > m$  tel que  $n \geq p \Rightarrow v_n \geq \frac{A}{2}$ .  
– Le cas  $\ell = -\infty$  se traite par changement de signe.
2. Penser à la suite de terme général  $u_n = (-1)^n$ .
3. La suite  $u$  a maintenant une limite, finie ou infinie, et on se ramène au début de l'exercice.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve  $p_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$ . C'est une suite décroissante minorée. Soit  $\ell$  sa limite.

On vérifie que  $\ln p_{2n} - \ln p_n \leq n \ln \left(1 - \frac{1}{4n}\right)$ . Dans ces conditions, conclure que  $\ell = 0$ .