Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite bornée telle que : $\forall n \geq 1,\ 2u_n \leq u_{n-1} + u_{n+1}$.
Montrer que cette suite est convergente.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{kn}$ (où k est un entier donné supérieur ou égal à 2) est convergente.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

On considère la suite de terme général $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$.

Montrer que pour tout n, $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n$.
La suite (u_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

On se donne une suite réelle (u_n) et on pose $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{\infty} v_n = \ell$.
2. Vérifier sur un exemple que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la réciproque est vraie.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit p_n la probabilité d'obtenir exactement n fois pile en $2n$ lancers d'une pièce équilibrée.
Calculer p_n et déterminer $\lim\limits_{\infty} p_n$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$ est croissante et bornée.

Soit ℓ sa limite. Discuter suivant le signe de ℓ.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que la suite (u_n) est croissante, ensuite que $u_n \leq k - 1$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La suite (u_n) est croissante. On vérifie $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n$ donc $u_{n+1}^2 \leq 1 + \sqrt{2}\, u_n \leq 1 + \sqrt{2}\, u_{n+1}$.

Autrement dit, pour tout $n \geq 1$, on a $P(u_n) \leq 0$ avec $P(x) = x^2 - x\sqrt{2} - 1 \ldots$

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

1. – On traite d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $n > m \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$.

   On en déduit l'existence de $p > m$ tel que $n \geq p \Rightarrow |v_n| \leq 2\varepsilon$.

   – Le cas $\ell \in \mathbb{R}$ se ramène au précédent par une translation.

   – Si $\ell = +\infty$, soit $A > 0$ quelconque. Il existe m tel que $n > m \Rightarrow u_n \geq A$.

   On en déduit $p > m$ tel que $n \geq p \Rightarrow v_n \geq \frac{A}{2}$.

   – Le cas $\ell = -\infty$ se traite par changement de signe.
2. Penser à la suite de terme général $u_n = (-1)^n$.
3. La suite u a maintenant une limite, finie ou infinie, et on se ramène au début de l'exercice.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On trouve $p_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{2n}}$. C'est une suite décroissante minorée. Soit ℓ sa limite.

On vérifie que $\ln p_{2n} - \ln p_n \leq n \ln\left(1 - \frac{1}{4n}\right)$. Dans ces conditions, conclure que $\ell = 0$.