Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite dont les suites extraites $(a_n = u_{2n})$ et $(b_n = u_{3n})$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que $\ell = \ell'$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

On se donne une suite réelle (u_n).

On suppose que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite bornée ne possèdant qu'une seule valeur d'adhérence.

Montrer que cette suite est convergente.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soit (u_n) une suite telle que $\lim\limits_{\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Prouver que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est vide ou est un intervalle fermé.

Donner un exemple représentatif de cette deuxième éventualité.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, considérer $c_n = u_{6n}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Considérer la suite des u_{6n} et celle des u_{6n+3}.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

On suppose que (u_n) est bornée et que a est son unique valeur d'adhérence.

On suppose par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente, donc pas convergente vers a.

On se donne $\varepsilon > 0$ et on extrait une suite (v_n) de (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |v_n - a| \geq \varepsilon$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Considérer la suite de terme général $u_n = \ln n$.
- On suppose que $X \neq \emptyset$, et on se donne deux valeurs d'adhérence $a < b$.

  Soit c un élément de $]a, b[$, et $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < c < b - \varepsilon$.

  On prouve enfin l'existence d'un entier n tel que $|c - u_n| \leq \varepsilon$.
- Penser à des parcours successifs de $[0, 1]$, dans un sens puis dans l'autre, avec un pas qui diminue à chaque nouveau parcours.