Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Montrer que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$ sont adjacentes.

Montrer que leur limite commune est irrationnelle.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Trouver la condition sur les réels u_0, v_0, $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ pour que les suites (u_n) et (v_n) définies par les récurrences $u_{n+1} = \frac{u_n + \lambda v_n}{1 + \lambda}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + \mu v_n}{1 + \mu}$ soient adjacentes.

Dans le cas général, les suites (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes, et vers quelle limite ?

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Montrer que la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$ est convergente et que sa limite est un irrationnel.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Etudier les suites (u_n) et (v_n) définies par la donnée du couple $(u_0 = a > 0, v_0 = b > 0)$ et par les relations $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient a et b deux réels strictement positifs.

On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout n, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- La suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
- Utiliser $n(n!)u_n < n(n!)\ell < n(n!)v_n$, et en déduire que ℓ est irrationnel.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\geq 0}$ est géométrique, puis que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Etudier alors les monotonies des suites u et v.

On constate qu'elles sont adjacentes $\Leftrightarrow \mu \geq \lambda$ ou $u_0 = v_0$.

On trouve alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{(1+\lambda)u_0 + \lambda(1+\mu)v_0}{1+2\lambda+\lambda\mu}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Montrer que les suites $(a_n = u_{2n})$ et $(b_n = u_{2n+1})$ sont adjacentes.

Utiliser ensuite l'encadrement $u_{2n+1} = u_{2n} - \dfrac{1}{(2n+1)!} < \ell < u_{2n}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Pour tout $n \geq 1$, vérifier qu'on a : $v_n \geq u_n$.

En déduire les monotonies de (u_n) et (v_n), à partir de $n = 1$.

Justifier pourquoi les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Montrer que leurs limites sont égales en utilisant les définitions des suites u et v.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \leq v_n$.

En déduire les monotonies de (u_n) et (v_n), à partir de $n = 1$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, ensuite que leurs limites sont égales.