Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient m, n, p des entiers naturels.

1. Montrer que $1 \leq m \leq n \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^m < 1 + \frac{m}{n} + (\frac{m}{n})^2$.
2. En déduire $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$, puis $(1 + \frac{p}{n})^n < 3^p$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de réels de $[0, 1]$.

Prouver l'inégalité $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On considère les réels $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ et $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$.
Montrer que $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leq n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}^+$, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Montrer que $\min\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right) \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \leq \max\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}\right)$.