# Énoncés des exercices

Exercice 1 [ Indication ] [ Correction ]

Résoudre $\mathrm{E}(2x-1)=\mathrm{E}(x-4)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 [ Indication ] [ Correction ]

Etudier $\lim\limits_{\infty}[u_n]$ si $\lim\limits_{\infty} u_n=\ell$.

Exercice 3 [ Indication ] [ Correction ]

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}([x]+[2x]+\cdots+[nx])$.

Exercice 4 [ Indication ] [ Correction ]

Soient $x$ un réel, et $n$ un entier naturel non nul.

On note $t\mapsto[t]$ l'opération "partie entière".

1. Montrer que pour tout entier relatif $k$, $\left[\dfrac{x+k}{n}\right]=\left[\dfrac{[x]+k}{n}\right]$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{x+k}{n}\right]=[x]$.

Exercice 5 [ Indication ] [ Correction ]

Montrer que tout rationnel $r$ de $[0,1[$ s'écrit d'une manière unique :

$$r=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\cdots+\frac{a_n}{n!}+\cdots$$

les entiers $a_i$ (nuls à partir d'un certain rang) vérifiant $0\le a_i<i$.

Mettre sous cette forme le rationnel $\dfrac{5}{7}$.

Exercice 6 [ Indication ] [ Correction ]

Calculer $\lambda=\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\left\{\sup\limits_{x\in[0,1]}|x^2+tx|\right\}$.

# Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Noter $k = [x]$, et discuter suivant le placement de $x$ par rapport à $k + \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [u_n] = \ell$ :
- Si $\ell$ n'est pas entier, la suite $([u_n])$ est stationnaire donc convergente en $[\ell]$.
- Si $\ell$ est un entier, alors plusieurs cas sont possibles. . .,

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $kx \le [kx] < kx + 1$. On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{x}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

1. Si $q = \left[\dfrac{x+k}{n}\right]$, $qn - k \le x < (q+1)n - k \Rightarrow qn - k \le [x] < (q+1)n - k \Rightarrow \ldots$
2. On suppose d'abord que $x \in Z$. Soit $x = qn + r$ la division de $x$ par $n$.
   Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, discuter suivant la position de $r + k$ par rapport à $n$.
   Si $x$ est un réel quelconque, utiliser la question (1).

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

- On commence par l'unicité des $(a_n)$. On note : $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n-1} \dfrac{a_k}{k!}$ et $r_n = \sum\limits_{k\ge n+1} \dfrac{a_k}{k!}$.
  Prouver $a_n = [n!(r - s_n)] = [n!r] - n!s_n$.
- Réciproquement, on a $0 \le a_n \le n-1$ (récurrence). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N!r$ soit entier. Prouver que pour tout $n \ge N$, on a $a_{n+1} = 0$, donc $s_{n+1} = r$.
- La décomposition de $r = \dfrac{5}{7}$ est : $\dfrac{5}{7} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} + \dfrac{4}{6!} + \dfrac{2}{7!}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

- Traiter le cas $t \ge 0$.
- Si $t < 0$, étudier $x \mapsto |x(x+t)|$.
  Il apparaît alors les cas $t \le -2$, $-2 \le t \le -1$, $-1 \le t \le 0$.
- La borne inférieure $\lambda$ est obtenue en supposant $-1 \le t \le 0$.
  Plus précisément, elle est obtenue quand $t = 2 - 2\sqrt{2}$ et elle vaut $3 - 2\sqrt{2}$.