

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Résoudre $E(2x - 1) = E(x - 4)$ dans \mathbb{R} .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Etudier $\lim_{n \rightarrow \infty} [u_n]$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} ([x] + [2x] + \dots + [nx])$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient x un réel, et n un entier naturel non nul.

On note $t \mapsto [t]$ l'opération "partie entière".

1. Montrer que pour tout entier relatif k , $\left[\frac{x+k}{n} \right] = \left[\frac{[x]+k}{n} \right]$.

2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x+k}{n} \right] = [x]$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que tout rationnel r de $[0, 1[$ s'écrit d'une manière unique :

$$r = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \dots + \frac{a_n}{n!} + \dots$$

les entiers a_i (nuls à partir d'un certain rang) vérifiant $0 \leq a_i < i$.

Mettre sous cette forme le rationnel $\frac{5}{7}$.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lambda = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \sup_{x \in [0,1]} |x^2 + tx| \right\}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Noter $k = [x]$, et discuter suivant le placement de x par rapport à $k + \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \ell$:
- Si ℓ n'est pas entier, la suite $([u_n])$ est stationnaire donc convergente en $[\ell]$.
- Si ℓ est un entier, alors plusieurs cas sont possibles. . . ,

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser $kx \leq [kx] < kx + 1$. On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \frac{x}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Si $q = \left\lfloor \frac{x+k}{n} \right\rfloor$, $qn - k \leq x < (q+1)n - k \Rightarrow qn - k \leq [x] < (q+1)n - k \Rightarrow \dots$
2. On suppose d'abord que $x \in \mathbb{Z}$. Soit $x = qn + r$ la division de x par n .
Pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, discuter suivant la position de $r+k$ par rapport à n .
Si x est un réel quelconque, utiliser la question (1).

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- On commence par l'unicité des (a_n) . On note : $s_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{k!}$ et $r_n = \sum_{k \geq n+1} \frac{a_k}{k!}$.
Prouver $a_n = [n!(r - s_n)] = [n!r] - n!s_n$.
- Réciproquement, on a $0 \leq a_n \leq n-1$ (récurrence). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N!r$ soit entier.
Prouver que pour tout $n \geq N$, on a $a_{n+1} = 0$, donc $s_{n+1} = r$.
- La décomposition de $r = \frac{5}{7}$ est : $\frac{5}{7} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{4}{6!} + \frac{2}{7!}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

- Traiter le cas $t \geq 0$.
- Si $t < 0$, étudier $x \mapsto |x(x+t)|$.
Il apparaît alors les cas $t \leq -2$, $-2 \leq t \leq -1$, $-1 \leq t \leq 0$.
- La borne inférieure λ est obtenue en supposant $-1 \leq t \leq 0$.
Plus précisément, elle est obtenue quand $t = 2 - 2\sqrt{2}$ et elle vaut $3 - 2\sqrt{2}$.