# Énoncés des exercices

**Exercice 1** [ Indication ] [ Correction ]

1. Etudier l'existence et le signe des racines réelles de $P = (m-2)x^2 + (2m+3)x + m + 2$.
2. Même question avec $P = (m-2)x^2 - (2m-5)x + m + 3$.

**Exercice 2** [ Indication ] [ Correction ]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.
2. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$.
3. $\sqrt{x^2+mx-1} = -x + 3m$ (avec $m$ réel).

**Exercice 3** [ Indication ] [ Correction ]

Résoudre $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 4** [ Indication ] [ Correction ]

Résoudre le système $\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$ dans $\mathbb{R}$.

**Exercice 5** [ Indication ] [ Correction ]

Montrer que pour tous réels positifs $a, b$ : $(a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

**Exercice 6** [ Indication ] [ Correction ]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 < \sqrt{x^2+8}$.
2. $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$.

**Exercice 7** [ Indication ] [ Correction ]

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel $m$, le nombre de solutions réelles de l'équation $(E_m)$ : $x - 1 = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + m}$.

On note $\varphi(m)$ l'unique solution de cette équation quand elle existe.

Etudier l'application $\varphi$ (monotonie, continuité, limites aux bornes).

# Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Si $m = 2$, une seule seule racine, négative. Si $m \neq 2$, $\Delta = 12m + 25$.
   Si deux racines réelles distinctes $\alpha, \beta$, former $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, et discuter.
2. Si $m = 2$, une seule racine. Si $m \neq 2$, $\Delta = 49 - 24m$. Continuer comme ci-dessus.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. La seule solution de $(E)$ est $x = 23$.
2. Pour $x \geq 24$, on a $\sqrt{x - 24} < \sqrt{x - 9}$. Il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
3. Si $m = 0$, il n'y a pas de solution.
   Si $m \neq 0$, la seule solution est $x_m = \dfrac{9m^2 + 1}{7m}$, si $m \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right[ \cup \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $X = \sqrt[4]{41 + x}$ et $Y = \sqrt[4]{41 - x}$. On a $X^4 + Y^4 = 82$ et $S = X + Y = 4$.
Exprimer $X^4 + Y^4$ en fonction de $S = X + Y$ et de $P = XY$.
En déduire $P = 29$ ou $P = 3$. Les deux seules solutions sont $x = -40$ et $x = 40$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Procéder par somme et différence.
- Si $y = x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{10}$. Si $y = -x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm 2$.
- Si $y \neq \pm x$, on obtient $x + y = \varepsilon$ et $xy = -3$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Discuter suivant $\varepsilon$.
- Finalement, on trouve 9 couples solutions

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Deux factorisations très simples suffisent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. L'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[$.
2. L'ensemble des solutions est $]0, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

- On a $(E_m) \Leftrightarrow (f_m(x) = 0$ et $x \geq 1 =$, avec $f_m(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x + m - 1$.
  Montrer que $f_m$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  $(E_m)$ n'a pas de solution réelle si $m > -2$, et a une seule solution $\varphi(m) \geq 1$ si $m \leq -2$.
  On étudie ensuite $\varphi$ et $\varphi^{-1}$. On trouve $\lim\limits_{m \to -\infty} \varphi(m) = +\infty$. et $\varphi(m) \sim -\left(\frac{m}{4}\right)^{1/3}$.