Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

1. Etudier l'existence et le signe des racines réelles de $P = (m-2)x^2 + (2m+3)x + m + 2$.
2. Même question avec $P = (m-2)x^2 - (2m-5)x + m + 3$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = 2$.
2. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-24} = x$.
3. $\sqrt{x^2 + mx - 1} = -x + 3m$ (avec m réel).

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Résoudre $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt[4]{41-x} = 4$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Résoudre le système $\begin{cases} x^3 = 7x + 3y \\ y^3 = 7y + 3x \end{cases}$ dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous réels positifs a, b : $(a^2 + a^{\frac{4}{3}} b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + (b^2 + a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $2x + 1 < \sqrt{x^2 + 8}$.
2. $x + \sqrt{x^2 - 5x + 4} < 2$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de l'équation (E_m) : $x - 1 = \sqrt[4]{x^4 + x^2 + m}$.

On note $\varphi(m)$ l'unique solution de cette équation quand elle existe.

Etudier l'application φ (monotonie, continuité, limites aux bornes).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Si $m = 2$, une seule seule racine, négative. Si $m \neq 2$, $\Delta = 12m + 25$.
   Si deux racines réelles distinctes α, β, former $\alpha\beta$ et $\alpha + \beta$, et discuter.
2. Si $m = 2$, une seule racine. Si $m \neq 2$, $\Delta = 49 - 24m$. Continuer comme ci-dessus.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. La seule solution de (E) est $x = 23$.
2. Pour $x \geq 24$, on a $\sqrt{x - 24} < \sqrt{x - 9}$. Il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
3. Si $m = 0$, il n'y a pas de solution.
   Si $m \neq 0$, la seule solution est $x_m = \dfrac{9m^2 + 1}{7m}$, si $m \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0\right[\cup \left[\frac{1}{2\sqrt{3}}, +\infty\right[$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Poser $X = \sqrt[4]{41 + x}$ et $Y = \sqrt[4]{41 - x}$. On a $X^4 + Y^4 = 82$ et $S = X + Y = 4$.
Exprimer $X^4 + Y^4$ en fonction de $S = X + Y$ et de $P = XY$.
En déduire $P = 29$ ou $P = 3$. Les deux seules solutions sont $x = -40$ et $x = 40$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Procéder par somme et différence.
- Si $y = x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{10}$. Si $y = -x$, on trouve $x = 0$ ou $x = \pm 2$.
- Si $y \neq \pm x$, on obtient $x + y = \varepsilon$ et $xy = -3$, avec $\varepsilon = \pm 1$. Discuter suivant ε.
- Finalement, on trouve 9 couples solutions

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Deux factorisations très simples suffisent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. L'ensemble des solutions est $]-\infty, 1[$.
2. L'ensemble des solutions est $]0, 1]$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

- On a $(E_m) \Leftrightarrow (f_m(x) = 0$ et $x \geq 1 =$, avec $f_m(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x + m - 1$.
  Montrer que f_m est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  (E_m) n'a pas de solution réelle si $m > -2$, et a une seule solution $\varphi(m) \geq 1$ si $m \leq -2$.
  On étudie ensuite φ et φ^{-1}. On trouve $\lim\limits_{m \to -\infty} \varphi(m) = +\infty$. et $\varphi(m) \sim -\left(\frac{m}{4}\right)^{1/3}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.