



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$  est un entier.

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $m$  et  $n$  des entiers naturels.

1. Montrer que si  $n$  n'est pas un carré parfait, alors  $\sqrt{n}$  est irrationnel.
2. Montrer que si  $m$  et  $n$  ne sont pas des carrés, alors  $\sqrt{m} + \sqrt{n}$  n'est pas rationnel.

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

1. Montrer que pour tous  $a, b$  dans  $\mathbb{Q}$ ,  $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ .
2. Montrer que :  $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ ,  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que  $\sqrt[3]{5} + \sqrt{2}$  est un irrationnel.

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $A$  l'ensemble des réels de  $[0, 1]$  dont le développement décimal réduit ne contient pas 9. Montrer que  $A$  est un ensemble fermé.



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Posons  $a = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ .

Utiliser  $a^3 + b^3 = 90$  et vérifier que  $ab = 7$ .

En déduire que  $x = a + b$  est racine d'un polynôme de degré 3. On trouve  $x = 6$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Supposer par l'absurde que  $n$  n'est pas un carré et que  $\sqrt{n}$  est rationnel  $\frac{a}{b}$ .

Raisonner sur les facteurs premiers de  $n$ ,  $a$  et  $b$ .

2. Par l'absurde, supposer que  $r = \sqrt{m} + \sqrt{n}$  est rationnel.

En déduire que  $\sqrt{mn}$  est rationnel et utiliser la question précédente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Facile en utilisant la première question de l'exercice précédent.

2. Chercher à isoler  $\sqrt{6}$  par exemple. On utilise encore la question 1 de l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Supposer que  $x = \sqrt[3]{5} + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  et utiliser  $5 = (x - \sqrt{2})^3$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Soit  $(v_n)$  une suite de  $A$ , convergente vers  $\ell$ . Il faut montrer  $\ell \in A$ .

Pour cela vérifier que pour tout entier  $k$ , la suite  $a_{n,k}$  des  $k$ -ièmes décimales des  $v_n$  successifs est stationnaire en une valeur  $b_k$ .

Montrer que  $\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ , qui est bien un élément de  $A$ .