Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$ est un entier.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient m et n des entiers naturels.

1. Montrer que si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnnel.
2. Montrer que si m et n ne sont pas des carrés, alors $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ n'est pas rationnel.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

1. Montrer que pour tous a, b dans $\mathbb{Q}$, $a+b\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow a=b=0$.
2. Montrer que : $\forall\,(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3,\ a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que $\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit A l'ensemble des réels de $[0,1]$ dont le développement décimal réduit ne contient pas 9. Montrer que A est un ensemble fermé.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Posons $a = \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}$, $b = \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$.

Utiliser $a^3+b^3=90$ et vérifier que $ab=7$.

En déduire que $x=a+b$ est racine d'un polynôme de degré 3. On trouve $x=6$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. Supposer par l'absurde que n n'est pas un carré et que $\sqrt{n}$ est rationnel $\frac{a}{b}$.
   Raisonner sur les facteurs premiers de n, a et b.
2. Par l'absurde, supposer que $r=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ est rationnel.
   En déduire que $\sqrt{mn}$ est rationnel et utiliser la question précédente.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. Facile en utilisant la première question de l'exercice précédent.
2. Chercher à isoler $\sqrt{6}$ par exemple. On utilise encore la question 1 de l'exercice précédent.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Supposer que $x=\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ et utiliser $5=(x-\sqrt{2})^3$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Soit (v_n) une suite de A, convergente vers ℓ. Il faut montrer $\ell\in A$.

Pour cela vérifier que pour tout entier k, la suite $a_{n,k}$ des k-ièmes décimales des v_n successifs est stationnaire en une valeur b_k.

Montrer que $\ell=\sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$, qui est bien un élément de A.