Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Quelle est la probabilité pour que deux tirages successifs du loto (6 numéro sur 49) aient au moins un numéro en commun ?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Quelle est la probabilité pour que dans une classe de n élèves, les anniversaires d'au moins deux élèves tombent le même jour ?

A partir de quelle valeur de n cette probabilité est-elle supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On se donne n points du plan, trois à trois non alignés.

Combien existe-t-il de polygônes à p cotés dont les sommets soient p de ces points ?.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Quel est le nombre de diagonales d'un polygône strictement convexe de n cotés ?

En combien de points intérieurs au polygône ces diagonales se coupent-elles ? (on supposera que le polygône est dans sa forme la plus générale, c'est-à-dire que les points d'intersection considérés sont distincts deux à deux.) Pour cette question, on donnera une première démonstration par récurrence, puis une autre par un calcul de dénombrement.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Cette probabilité est $q = \dfrac{563383}{998844} \approx 0.564035$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Cette probabilité est $q_n = \dfrac{\mathrm{A}_{365}^{n}}{365^n} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{365}\right)$

Elle est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ à partir de $n = 23$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On choisit doit d'abord les p sommets du polygône, puis on fixe l'un d'eux.

On choisit alors une permutation des $n-1$ autres sommets, mais attention au sens de parcours.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Le polygône comporte donc $\frac{1}{2}\,n(n-3)$ diagonales distinctes.
- Notons p_n le nombre de points d'intersection des diagonales du polygône convexe $\mathcal{P}_n$ à n sommets (rappelons qu'on ne considère que des points intérieurs à $\mathcal{P}_n$.)
  On vérifie l'égalité $p_n = p_{n-1} + \mathrm{C}_{n-1}^{3}$, et on en déduit $p_n = \frac{1}{24}\,n(n-1)(n-2)(n-3) = \mathrm{C}_n^4$.
- Cosntater qu'un point d'intersection intérieur au polygône $\mathcal{P}_n$ est défini de façon biunivoque par la donnée de quatre points de $\mathcal{P}_n$.