Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

On définit une suite (u_n) par : $u_0 = 1$, $u_1 = \cos\theta$, et pour $n \geq 2$: $u_n = 2u_1 u_{n-1} - u_{n-2}$.
Calculer u_n, pour tout entier n.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel.

- Combien l'équation $x + y = n$ possède-t-elle de couples solutions (x, y) dans $\mathbb{N}^2$?
- Combien l'équation $x + y + z = n$ possède-t-elle de triplets solutions (x, y, z) dans $\mathbb{N}^3$?
- Généraliser au calcul du nombre de $(p + 1)$-uplets solutions de $x_0 + x_1 + \cdots + x_p = n$.
  Pour cette question, on donnera deux démonstrations, l'une qui utilise une récurrence et l'autre qui s'appuie sur un calcul de dénombrement.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ n'est pas un entier.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}}} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

(le nombre 2 apparaissant n fois sous la racine).

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier n, on a $u_n = \cos(n\theta)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

- Le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^2$ de $x + y = n$ est $n + 1$.
- Le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^3$ de $x + y + z = n$ est $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.
- Le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^p$ de $x_0 + x_1 + \cdots + x_p = n$ est C_{n+p}^{n}.
- Pour le dénombrement, il faut identifier chaque solution à un mot.

  Par exemple la solution $(3, 0, 2, 1)$ de $x + y + z + t = 6$ est associée au mot $*\,*\,*\,|\,|\,*\,*\,|\,*$.

  De même la solution $(0, 1, 5, 0)$ est associée à $|\,*\,|\,*\,*\,*\,*\,*\,|$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

L'idée est que u_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair (donc n'est pas entier !)

On le vérifie par récurrence sur n.

- Si n est impair, au passe facilement du rang $n - 1$ au rang n.
- Si n est pair, il faut décomposer la somme u_n en la sous-somme des termes de dénominateur impair et celle des termes de dénominateur pair. Dans celle-ci, il est possible d'utiliser la propriété au rang $n/2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Soit u_n l'expression qu'il s'agit ici de calculer.

On note que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.