Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Cet exercice permet de construire une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

On définit une application f, de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$, de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(0,y) = f(y-1,0) + 1 & \text{si } y \geq 1 \\ f(x,y) = f(x-1,y+1) + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{S}_k = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2, x+y=k\}$.

1. Calculer $\text{card}(\mathcal{S}_k)$, et $f(x,y)$ en fonction de x et de y.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! k \in \mathbb{N}$ tq : $\dfrac{k(k+1)}{2} \leq n < \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
3. Montrer que f est bijective. Quel est l'antécédent de 2000 ?

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$.

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f_n(n) + 1$.

Montrer que, pour tout entier p, $f \neq f_p$.

En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Montrer en revanche que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soit f une application de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$.

On définit une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante :

Pour tout $n \geq 1$, u_n est la n-ième décimale de $f(n)$.

On définit de même une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par $\begin{cases} v_n = 1 & \text{si } u_n = 0. \\ v_n = 0 & \text{si } u_n \neq 0. \end{cases}$

Montrer que le réel $r = \overline{0, v_1 v_2 \ldots v_n \ldots}$ n'a pas d'antécédent par f.

En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.