

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Cet exercice permet de construire une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur \mathbb{N} .

On définit une application f , de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vers \mathbb{N} , de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f(0, y) = f(y - 1, 0) + 1 & \text{si } y \geq 1 \\ f(x, y) = f(x - 1, y + 1) + 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Pour tout k de \mathbb{N} , on pose $\mathcal{S}_k = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x + y = k\}$.

1. Calculer $\text{card}(\mathcal{S}_k)$, et $f(x, y)$ en fonction de x et de y .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! k \in \mathbb{N}$ tq : $\frac{k(k+1)}{2} \leq n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
3. Montrer que f est bijective. Quel est l'antécédent de 2000 ?

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications de \mathbb{N} vers \mathbb{N} .

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = f_n(n) + 1$.

Montrer que, pour tout entier p , $f \neq f_p$.

En déduire que l'ensemble des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} n'est pas dénombrable.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.

Montrer en revanche que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit f une application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{R} .

On définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de la manière suivante :

Pour tout $n \geq 1$, u_n est la n -ième décimale de $f(n)$.

On définit de même une suite $(v_n)_{n \geq 1}$ par $\begin{cases} v_n = 1 & \text{si } u_n = 0. \\ v_n = 0 & \text{si } u_n \neq 0. \end{cases}$

Montrer que le réel $r = \overline{0, v_1 v_2 \dots v_n \dots}$ n'a pas d'antécédent par f .

En déduire que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.