Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour tout réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ est-elle une relation d'équivalence ?
Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?
La relation $(x,y)\mathcal{S}(z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = zt \\ xz \geq 0 \end{cases}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans le plan $\mathcal{P}$ d'origine O, la relation "$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow O, M, N$ sont alignés" est-elle une relation d'équivalence ? Même question si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \Leftrightarrow mq = np$. Est-ce une relation d'équivalence ?
Et si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, Z \subset X \cap Y$.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}, A \cap X = B \cap X$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \text{card}(A \Delta B)$ est pair.
$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. Se souvenir que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ définit toujours une relation d'équivalence.
2. Constater que $x\mathcal{R}a \Leftrightarrow (x = a)$ ou $(P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3 = 0)$. Discuter suivant a, et se demander si les éléments obtenus sont vraiment différents. On pourra faire d'une part une démonstration purement algébrique, d'autre part une démonstration graphique.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont des hyperboles et les axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$, Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Cela n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente : il faut utiliser l'hypothèse sur $\mathcal{M}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente. Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, il pourra être de commode de noter a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités par les ensembles A, B, C dans leur configuration la plus générale (faire un dessin.)

Montrer alors que $\text{Card}\,(A\Delta B) + \text{Card}\,(B\Delta C)$ diffère de $\text{Card}\,(A\Delta C)$ par un entier pair.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.