Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x-y)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer, pour tout réel x, le cardinal de la classe d'équivalence de x.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^2$, la relation $(x,y)\mathcal{R}(z,t) \Leftrightarrow xy = zt$ est-elle une relation d'équivalence ?
Si oui quelles sont les classes d'équivalence ?
La relation $(x,y)\mathcal{S}(z,t) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = zt \\ xz \geq 0 \end{cases}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Dans le plan $\mathcal{P}$ d'origine O, la relation "$M\mathcal{R}N \Leftrightarrow O, M, N$ sont alignés" est-elle une relation d'équivalence ? Même question si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on pose $(m,n)\mathcal{R}(p,q) \Leftrightarrow mq = np$. Est-ce une relation d'équivalence ?
Et si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$?

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit $\mathcal{M}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$ telle que : $\forall X, Y \in \mathcal{M}, \exists Z \in \mathcal{M}, Z \subset X \cap Y$.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}, A \cap X = B \cap X$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble fini.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \text{card}(A\Delta B)$ est pair.
$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

1. Se souvenir que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ définit toujours une relation d'équivalence.
2. Constater que $x\mathcal{R}a \Leftrightarrow (x = a)$ ou $(P(x) = x^2 + ax + a^2 - 3 = 0)$. Discuter suivant a, et se demander si les éléments obtenus sont vraiment différents. On pourra faire d'une part une démonstration purement algébrique, d'autre part une démonstration graphique.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont des hyperboles et les axes $x = 0$ et $y = 0$.

La relation $\mathcal{S}$ n'est pas d'équivalence car elle n'est pas transitive.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

La relation $\mathcal{R}$ n'est pas transitive.

Si on remplace $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P} - \{O\}$, Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont les demi-droites issues (et privées) de l'origine.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Cela n'est plus vrai si on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ par $\mathbb{N}^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente : il faut utiliser l'hypothèse sur $\mathcal{M}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

Seule la transitivité n'est pas évidente. Si $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$, il pourra être de commode de noter a, b, c, ab, ac, bc, abc les cardinaux des sous-ensembles délimités par les ensembles A, B, C dans leur configuration la plus générale (faire un dessin.)

Montrer alors que $\text{Card}\,(A\Delta B) + \text{Card}\,(B\Delta C)$ diffère de $\text{Card}\,(A\Delta C)$ par un entier pair.