# Énoncés des exercices

**Exercice 1** [Indication] [Correction]
Soient $E$ et $F$ deux ensembles ordonnés et $A$ une partie non vide de $E$.
Soit $f$ une application croissante de $E$ dans $F$.
Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.
La propriété subsiste-t-elle si on remplace "max" par "sup" ?

**Exercice 2** [Indication] [Correction]
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur $E$.

1. Sur $E$ on pose $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y)$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question en définissant : $x\mathcal{U}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ ou $x\mathcal{S}y)$.

**Exercice 3** [Indication] [Correction]
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ (x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \end{cases}$
Est-ce que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordre ?

**Exercice 4** [Indication] [Correction]
Soient $E$ et $F$ deux ensembles ordonnés (l'ordre sur $E$ étant total).
Soit $f : E \mapsto F$, croissante. Montrer que $f$ est injective $\Leftrightarrow$ elle est strictement croissante.
Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que $E$ est totalement ordonné.

**Exercice 5** [Indication] [Correction]
NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit $E$ un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et telle que toute partie non vide possède une borne inférieure.
Montrer que toute partie non vide de $E$ possède une borne supérieure.

**Exercice 6** [Indication] [Correction]
NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit $E$ un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure. Soit $f$ une application croissante de $E$ dans $E$.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$ est non vide
2. Montrer que la borne supérieure $a$ de $X$ vérifie $f(a) = a$.

**Exercice 7** [Indication] [Correction]
Cet exercice est connu sous le nom de "problème des hussards".
Soit $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de $np$ réels.
Comparer $A = \min\limits_{1\leq i\leq n}\left(\max\limits_{1\leq j\leq p} a_{i,j}\right)$ et $B = \max\limits_{1\leq j\leq p}\left(\min\limits_{1\leq i\leq n} a_{i,j}\right)$


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

# Indications ou résultats

**Indication pour l'exercice 1** [Retour à l'énoncé]

Si $\alpha = \max A$, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$ donc...
Ce n'est plus vrai avec "sup". Utiliser par exemple $f$ croissante avec une discontinuité.

**Indication pour l'exercice 2** [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{T}$ est réflexive, antisymétrique, transitive : c'est une relation d'ordre sur $E$.
   Ce n'est pas nécessairement un ordre total (penser au cas $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.)
2. Penser encore au cas particulier $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

**Indication pour l'exercice 3** [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{R}$ est ordre partiel. Penser à $(0,1)$ et $(1,0)$.
2. $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$ : c'est l'ordre *lexicographique*.

**Indication pour l'exercice 4** [Retour à l'énoncé]

– Pas d'indication, c'est trop facile :-)
– Ce n'est plus vrai si l'ordre est partiel.
Considérer par exemple un ensemble fini de cardinal $\geq 2$, muni de l'inclusion.

**Indication pour l'exercice 5** [Retour à l'énoncé]

Soit $X \subset A$, $X \neq \emptyset$. Soit $Y$ l'ensemble des majorants de $X$.
Montrer que $Y$ a une borne inférieure $\alpha$, puis que $\alpha = \mathrm{Sup}(A)$.

**Indication pour l'exercice 6** [Retour à l'énoncé]

1. Penser à $\alpha = \min(E)$.
2. Montrer que $a \leq f(a)$, puis $f(a) \leq a$.

**Indication pour l'exercice 7** [Retour à l'énoncé]

Il existe $i_0$ tel que $A = \max\limits_{1 \leq j \leq p} a_{i_0,j}$, et il existe $j_0$ tel que $B = \min\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,j_0}$.
Montrer que $B \leq H \leq A$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.