

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E .

Soit f une application croissante de E dans F .

Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.

La propriété subsiste-t-elle si on remplace “max” par “sup” ?

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux relations d'ordre total sur E .

1. Sur E on pose $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question en définissant : $x\mathcal{U}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y)$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Sur \mathbb{R}^2 , on définit $\begin{cases} (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \\ (x, y)\mathcal{S}(x', y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \end{cases}$

Est-ce que \mathcal{R} et \mathcal{S} sont des relations d'ordre ?

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés (l'ordre sur E étant total).

Soit $f : E \mapsto F$, croissante. Montrer que f est injective \Leftrightarrow elle est strictement croissante.

Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.

Soit E un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et telle que toute partie non vide possède une borne inférieure.

Montrer que toute partie non vide de E possède une borne supérieure.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.

Soit E un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure. Soit f une application croissante de E dans E .

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E, x \leq f(x)\}$ est non vide
2. Montrer que la borne supérieure a de X vérifie $f(a) = a$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Cet exercice est connu sous le nom de “problème des hussards”.

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de np réels.

Comparer $A = \min_{1 \leq i \leq n} (\max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j})$ et $B = \max_{1 \leq j \leq p} (\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j})$

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Si $\alpha = \max A$, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$ donc...

Ce n'est plus vrai avec "sup". Utiliser par exemple f croissante avec une discontinuité.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. \mathcal{T} est réflexive, antisymétrique, transitive : c'est une relation d'ordre sur E .
Ce n'est pas nécessairement un ordre total (penser au cas $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.)
2. Penser encore au cas particulier $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

1. \mathcal{R} est ordre partiel. Penser à $(0, 1)$ et $(1, 0)$.
2. \mathcal{S} est une relation d'ordre total sur \mathbb{R}^2 : c'est l'ordre *lexicographique*.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

- Pas d'indication, c'est trop facile :-)
- Ce n'est plus vrai si l'ordre est partiel.
Considérer par exemple un ensemble fini de cardinal ≥ 2 , muni de l'inclusion.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Soit $X \subset A$, $X \neq \emptyset$. Soit Y l'ensemble des majorants de X .

Montrer que Y a une borne inférieure α , puis que $\alpha = \text{Sup}(A)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [Retour à l'énoncé]

1. Penser à $\alpha = \min(E)$.
2. Montrer que $a \leq f(a)$, puis $f(a) \leq a$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 [Retour à l'énoncé]

Il existe i_0 tel que $A = \max_{1 \leq j \leq p} a_{i_0, j}$, et il existe j_0 tel que $B = \min_{1 \leq i \leq n} a_{i, j_0}$.

Montrer que $B \leq H \leq A$.