Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E.
Soit f une application croissante de E dans F.
Montrer que si $\max A$ existe, alors $\max f(A)$ existe et est égal à $f(\max A)$.
La propriété subsiste-t-elle si on remplace "max" par "sup" ?

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations d'ordre total sur E.

1. Sur E on pose $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$. Est-ce une relation d'ordre (total, partiel) ?
2. Même question en définissant : $x\mathcal{U}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y)$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit $\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow x \le x' \text{ et } y \le y' \\ (x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \le y') \end{cases}$
Est-ce que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont des relations d'ordre ?

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles ordonnés (l'ordre sur E étant total).
Soit $f : E \mapsto F$, croissante. Montrer que f est injective $\Leftrightarrow$ elle est strictement croissante.
Montrer que le résultat n'est pas vrai si on ne suppose pas que E est totalement ordonné.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit E un ensemble ordonné admettant un plus grand élément et telle que toute partie non vide possède une borne inférieure.
Montrer que toute partie non vide de E possède une borne supérieure.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

NB : cet exercice utilise des notions un peu en marge du programme.
Soit E un ensemble ordonné possédant un élément minimum et dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure. Soit f une application croissante de E dans E.

1. Montrer que l'ensemble $X = \{x \in E, x \le f(x)\}$ est non vide
2. Montrer que la borne supérieure a de X vérifie $f(a) = a$.

EXERCICE 7 [Indication] [Correction]

Cet exercice est connu sous le nom de "problème des hussards".
Soit $(a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p}$ une famille de np réels.
Comparer $A = \min\limits_{1\le i\le n} \big(\max\limits_{1\le j\le p} a_{i,j}\big)$ et $B = \max\limits_{1\le j\le p} \big(\min\limits_{1\le i\le n} a_{i,j}\big)$

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Si $\alpha = \max A$, on a $a \leq \alpha$ donc $f(a) \leq f(\alpha)$ donc...
Ce n'est plus vrai avec "sup". Utiliser par exemple f croissante avec une discontinuité.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{T}$ est réflexive, antisymétrique, transitive : c'est une relation d'ordre sur E.
   Ce n'est pas nécessairement un ordre total (penser au cas $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.)
2. Penser encore au cas particulier $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. $\mathcal{R}$ est ordre partiel. Penser à $(0,1)$ et $(1,0)$.
2. $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$: c'est l'ordre *lexicographique*.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- Pas d'indication, c'est trop facile :-)
- Ce n'est plus vrai si l'ordre est partiel.
  Considérer par exemple un ensemble fini de cardinal ≥ 2, muni de l'inclusion.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Soit $X \subset A$, $X \neq \emptyset$. Soit Y l'ensemble des majorants de X.
Montrer que Y a une borne inférieure α, puis que $\alpha = \mathrm{Sup}(A)$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

1. Penser à $\alpha = \min(E)$.
2. Montrer que $a \leq f(a)$, puis $f(a) \leq a$.

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Il existe i_0 tel que $A = \max\limits_{1 \leq j \leq p} a_{i_0,j}$, et il existe j_0 tel que $B = \min\limits_{1 \leq i \leq n} a_{i,j_0}$.
Montrer que $B \leq H \leq A$.