

## Énoncés des exercices

**EXERCICE 1** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  et  $\mathcal{S} = \{X \subset E, \overline{f}(f(X)) = X\}$ .

1. Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Montrer que  $\overline{f}(f(A))$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
2. Montrer que toute intersection ou réunion d'éléments de  $\mathcal{S}$  est encore élément de  $\mathcal{S}$ .

**EXERCICE 2** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

1. Montrer que pour toute partie  $A$  de  $E$ ,  $\overline{f}(f(A)) \supset A$ .
2. Montrer que pour toute partie  $B$  de  $F$ ,  $f(\overline{f}(B)) = f(E) \cap B$ .
3. Prouver que  $f$  est injective  $\Leftrightarrow \forall A \subset E, \overline{f}(f(A)) = A$ .
4. Prouver que  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow \forall B \subset F, f(\overline{f}(B)) = B$ .

**EXERCICE 3** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides d'un ensemble  $E$ .

On considère l'application  $f$ , de  $\mathcal{P}(E)$  dans  $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$  définie par  $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ .

1. Montrer que  $f$  est injective  $\Leftrightarrow A \cup B = E$ .
2. Montrer que  $f$  est surjective  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ .
3. Dans le cas où  $f$  est bijective, déterminer  $f^{-1}$ .

**EXERCICE 4** [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

On lui associe l'application  $\chi_A$ , de  $E$  vers  $\{0, 1\}$ , définie par  $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$

Montrer que  $A \mapsto \chi_A$  est une bijection de  $\mathcal{P}(E)$  sur l'ensemble  $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ .