Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour toutes parties A et B disjointes de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.
Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
Prouver que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.
Montrer que pour toute partie A de E, $f(\overset{-1}{f}(B) \cap A) = B \cap f(A)$.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans E.
Montrer que f est bijective $\Leftrightarrow$ pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ (on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E.)

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Soient E un ensemble non vide, et A, B deux parties de E.
On note $[A, A \cup B] = \{X \subset E, A \subset X \subset A \cup B\}$ et $[A \cap B, B] = \{Y \subset E, A \cap B \subset Y \subset B\}$.
On définit $f : [A, A \cup B] \to [A \cap B, B]$ par $f(X) = X \cap B$.
On définit $g : [A \cap B, B] \to [A, A \cup B]$ par $g(Y) = Y \cup A$.
Montrer que f et g sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F.
On définit l'application $g : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ par : $\forall Y \subset F$, $g(Y) = \overset{-1}{f}(Y)$.

1. Montrer que g est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective.
2. Montrer que g est surjective $\Leftrightarrow$ f est injective.

EXERCICE 6 [Indication] [Correction]

Soit f une application de E dans F. Montrer l'équivalence de :

(a) f est injective

(b) Pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.