Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :

1. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. Entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble non vide. Soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{F}$ est un *filtre* si : $\begin{cases} (a) & \forall X, Y \in \mathcal{F},\ X \cap Y \in \mathcal{F} \\ (b) & \forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \supset X,\ Y \in \mathcal{F} \\ (c) & \emptyset \notin \mathcal{F} \end{cases}$

1. Que pourrait-on dire d'une famille non vide $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ ne vérifiant que (a) et (b) ?
2. $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
   A quelle condition $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, alors $E \in \mathcal{F}$.
4. Soit A un partie non vide de E.
   Montrer que que $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$ est un filtre sur E.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E.

On suppose que pour tout indice i de I, on a $E = A_i \cup B_i$.

Montrer que $E = F$, avec $F = \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap\limits_{i \in I} B_i\right)$.