

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :

1. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. Entre $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble non vide. Soit \mathcal{F} une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.

On dit que \mathcal{F} est un *filtre* si :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \forall X, Y \in \mathcal{F}, X \cap Y \in \mathcal{F} \\ (b) \quad \forall X \in \mathcal{F}, \forall Y \supset X, Y \in \mathcal{F} \\ (c) \quad \emptyset \notin \mathcal{F} \end{array} \right.$$

1. Que pourrait-on dire d'une famille non vide \mathcal{F} de $\mathcal{P}(E)$ ne vérifiant que (a) et (b) ?
2. $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
A quelle condition $\mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
3. Montrer que si \mathcal{F} est un filtre sur E , alors $E \in \mathcal{F}$.
4. Soit A un partie non vide de E .
Montrer que que $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$ est un filtre sur E .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties d'un ensemble E .

On suppose que pour tout indice i de I , on a $E = A_i \cup B_i$.

Montrer que $E = F$, avec $F = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)$.