



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Montrer que \mathcal{D} ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de \mathbb{R} .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On considère une famille finie d'ensembles distincts deux à deux.

Montrer que l'un au moins de ces ensembles ne contient aucun des autres.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

En utilisant uniquement l'axiome de la borne supérieure dans \mathbb{R} , montrer que pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel x , il existe un entier naturel n tel que $na > x$.

On exprime cette propriété en disant que \mathbb{R} est *archimédien*.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient a, b, c trois réels du segment $[0, 1]$.

Montrer que le minimum de $a(1 - b)$, $b(1 - c)$, $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel : on raisonnera par l'absurde et on considérera l'ensemble A des n de \mathbb{N}^* tels que $n\sqrt{2}$ soit entier.