CH.29 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

CH.29 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES 1
I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME 2
I.1. LOI DE FORCE DE LORENTZ 2
I.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL 2
I.3. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL 2
I.3.1. Maxwell-Gauss (M.G) 2
I.3.2. Maxwell-flux (M.Φ) 2
I.3.3. Maxwell-Faraday (M.F) 2
I.3.4. Maxwell-Ampère (M.A) 3
I.4. RELATIONS DE PASSAGE 3
II. EQUATIONS LIEES AUX POTENTIELS 3
II.1. CHAMPS EN FONCTION DES POTENTIELS 3
II.2. CHOIX D'UNE JAUGE 3
II.3. SOLUTION DES POTENTIELS RETARDES 4
III. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE 4
III.1. APPROCHE QUALITATIVE 4
III.2. EQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE 5
III.3. SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE D'ALEMBERT 5
III.3.1. Onde plane 5
III.3.2. Onde sphérique 6
IV. ONDE PLANE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE 6
IV.1. CAS PARTICULIER D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE 6
IV.1.1. Représentation complexe d'une O.P.P.M 6
IV.1.2. Expression des opérateurs en fonction de k et de la pulsation 7
IV.1.3. Structure de l'O.P.P.M électromagnétique 7
IV.2. GENERALISATION A UNE O.P.P 8
IV.3. VITESSE DE PHASE-VITESSE DE GROUPE 8
V. ASPECT ENERGETIQUE DE L'ONDE ELECTROMAGNETIQUE 9
V.1. BILAN ENERGETIQUE LOCAL 9
V.2. VECTEUR DE POYNTING 10
VI. POLARISATION D'UNE O.P.P.M ELECTROMAGNETIQUE 11
VI.1. DEFINITION 11
VI.2. EXEMPLES D'ETATS DE POLARISATION 11
VII. REFLEXION D'UNE O.P.P.M SUR UN PLAN CONDUCTEUR 12
VII.1. CARACTERISTIQUES DE L'ONDE REFLECHIE 12
VII.1.1. Conditions aux limites 12
VII.1.2. Expressions des champs réfléchis et du courant surfacique induit 12
VII.2. APPARITION D'UNE ONDE STATIONNAIRE 13
VII.2.1. Structure de l'onde résultante stationnaire 13
VII.2.2. Aspect énergétique de l'onde stationnaire 13
VIII. RAYONNEMENT DIPOLAIRE 14
VIII.1. CADRE DE L'ETUDE 14
VIII.2. DETERMINATION DES CHAMPS 15
VIII.2.1. Expression générale 15

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

VIII.2.2. Expression à grande distance de l'origine 16
VIII.2.3. Approximation locale par une onde plane 16
VIII.3. ASPECT ENERGETIQUE 16
VIII.3.1. Puissance rayonnée par un dipôle 16
VIII.3.2. Cas d'un mouvement sinusoïdal 17

****

I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME

I.1. LOI DE FORCE DE LORENTZ

• Dans un référentiel (R), on définit une entité physique $(\vec{E},\vec{B})$ appelée « champ électromagnétique » telle qu'une particule (charge q, vitesse $\vec{v}_R$) qui s'y trouve placée subisse une force donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_R \wedge \vec{B})}$$

• Le but de l'électromagnétisme est de déterminer ce champ à partir de la distribution de charges et de courants (ρ et $\vec{j}$) qui le crée.

I.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL

A partir de résultats antérieurs (Gauss, Ampère, Faraday…) et de considérations personnelles, J.C Maxwell (1831-1879) a postulé les équations suivantes (publications de 1855 à 1864) :

∗ Equation de Maxwell-Gauss: $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{\text{int}}/\varepsilon_0$

∗ Equation de Maxwell-flux: $div\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

∗ Equation de Maxwell-Faraday: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\varphi}{dt}$

∗ Equation de Maxwell-Ampère: $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Leftrightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(i_e + \iint_S \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S})$

I.3. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

I.3.1. ***Maxwell-Gauss*** (M.G)

• Les lignes du champ électrique peuvent diverger à partir de sources **ponctuelles** appelées **charges électriques** (= « monopôles » électriques).
• Le théorème de Gauss est applicable en régime **non permanent** (ceci n'a rien d'immédiat lorsqu'on démontre le théorème à partir de la loi de Coulomb, cette dernière n'étant alors plus valable).

I.3.2. ***Maxwell-flux*** (M.Φ)

• Le flux magnétique est **CONSERVATIF** (ce flux à travers toute surface coupant un même tube de champ est conservé).
• Les lignes de champ magnétique ne peuvent diverger à partir de sources ponctuelles : il n'existe **pas** de **monopôles magnétiques.**

I.3.3. ***Maxwell-Faraday*** (M.F)

Au même titre que des charges électriques, un champ magnétique variable dans le temps donne naissance à un champ électrique ; mais la **circulation** de ce champ induit est **non nulle** sur un **contour fermé** (phénomène d'induction).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I.3.4. ***Maxwell-Ampère*** (M.A)

• Au même titre que des courants de conduction (charges électriques en mouvement), un champ électrique non permanent engendre un champ magnétique (forme généralisée du **théorème d'Ampère**).

• Le terme $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé « **courant de déplacement** » (traduction malheureuse de l'anglais, car il n'y a pas de déplacement de charges électriques…).

La démarche de Maxwell fut la suivante : pour tenir compte de la conservation de la charge, il introduisit un terme supplémentaire dans l'équation (M.A) initiale, soit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D) \Rightarrow div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = 0 = div\vec{j} + div\vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j}_D = -\frac{\partial(\varepsilon_0 div\vec{E})}{\partial t} + div\vec{j}_D$$ (grâce à M.G)

Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, on permute les opérateurs, d'où :

$div(\vec{j}_D - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$; des considérations de cohérence interne de la théorie électromagnétique (aspect énergétique en particulier) et des confirmations expérimentales ont permis à Maxwell de retenir la solution la plus simple, soit : $\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

I.4. RELATIONS DE PASSAGE

On considère deux milieux (1) et (2) dont la surface de séparation (sa normale locale $\vec{n}_{1\to 2}$ étant orientée de (1) vers (2)) est porteuse d'une distribution de charges (σ ,en $C.m^{-2}$) et de courants ($\vec{j}_S$, en $A.m^{-1}$) **surfaciques** ; on a, juste de part et d'autre de la surface de séparation, les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}}$$ et : $$\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$$

Il y a donc **continuité** de la composante **tangentielle** de $\vec{E}$ et de la composante **normale** de $\vec{B}$

II. EQUATIONS LIEES AUX POTENTIELS

II.1. CHAMPS EN FONCTION DES POTENTIELS

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}}$$ $$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

où $\vec{A}$ est le « **potentiel-vecteur** » du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ et V son « **potentiel scalaire** ».

II.2. CHOIX D'UNE JAUGE

• Nous avons vu (chapitre 27) que le potentiel-vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}f$ (où f est une fonction quelconque) donne le même champ que $\vec{A}$; il en est de même pour $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ (il faut tenir compte du couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ désormais) vis-à-vis de $\vec{E}$.

• Faire le **choix** d'un couple de potentiels s'appelle « **choisir une JAUGE** » : nous allons en voir deux exemples après avoir établi les équations différentielles satisfaites par $\vec{A}$ et V ; donc :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = div(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta V - \frac{\partial (div\vec{A})}{\partial t} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial (div\vec{A})}{\partial t} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial(-\overrightarrow{grad}V - \partial\vec{A}/\partial t)}{\partial t} \Rightarrow$$

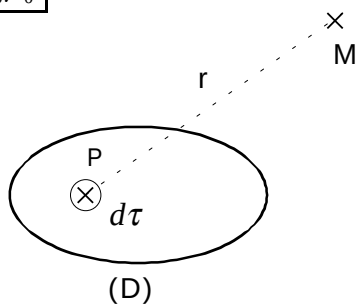
$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \overrightarrow{grad}(div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}) \quad (2)$$

- Les équations (1) et (2) sont **couplées** ; on peut faire les choix suivants :
  - ♦ **jauge de Coulomb** : $\boxed{div\vec{A} = 0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$: c'est l'équation de Poisson ,vue en statique, dont on connaît la solution ; mais dans l'équation (2), $\vec{A}$ et V restent **couplés**.
  - ♦ **jauge de Lorentz** : $\boxed{div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \vec{0} \\ \Delta V - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \end{cases}$ (3) et (4)

Les équations (3) et (4) sont alors **découplées** : les solutions sont connues sous le nom de « **potentiels retardés** ».

II.3. SOLUTION DES POTENTIELS RETARDES

On considère un domaine (D), porteur de charges et de courant électriques ; en posant $\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$, les potentiels retardés sont donnés par :



$$\boxed{\begin{aligned} V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_D \frac{\rho(P,t-r/c)}{r}d\tau \\ \vec{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\vec{j}(P,t-r/c)}{r}d\tau \end{aligned}}$$

- On constate que les expressions de $\vec{A}$ et V au point M, à **l'instant t**, dépendent de l'état des distributions de charges et de courants à **l'instant ANTERIEUR t-r/c** : ceci est compatible avec la Relativité Restreinte qui rejette la possibilité de propagation **instantanée** de phénomènes physiques (contrairement aux potentiels « coulombiens » ou « newtoniens ») ; la grandeur **c** apparaît ainsi comme une **vitesse de propagation** du champ électromagnétique mais nous reverrons cette notion plus loin.
- L'instant retardé t-r/c dépend du point P d'intégration, ce qui rend les calculs encore plus délicats : dans le cadre du programme, nous n'aurons pas à faire de tels calculs et nous ne reparlerons des potentiels retardés qu'à propos du « **rayonnement dipolaire** ».

III. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

III.1. APPROCHE QUALITATIVE

La possibilité de propagation d'une onde électromagnétique résulte du **couplage** des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans les équations de Maxwell ; supposons qu'en un point apparaisse un champ $\vec{E}$: ce

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

champ n'existant pas auparavant, il y a donc un « $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ » $\Rightarrow$ obtention d'un « $\overrightarrow{rot}\vec{B}$ » qui affecte le point considéré et son **voisinage** (par l'intermédiaire des dérivées spatiales) ; en ces points voisins, un champ magnétique est né, donc un « $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ » $\Rightarrow$ génération d'un « $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ » qui affecte le voisinage etc…Ainsi, de proche en proche, la perturbation initiale peut se propager sous forme d'un champ électromagnétique.

III.2. EQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE

• Dans le **vide**, en l'absence de charges et de courants, les équations de Maxwell se simplifient et l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$; d'où :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$ De même : $$\boxed{\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

• On vérifiera qu'avec la jauge de Lorentz, les potentiels V et $\vec{A}$ satisfont à la même équation ; cette équation aux dérivées partielles est du type :

$\boxed{\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$; elle porte le nom de « **équation de propagation** » ou « **équation de d'Alembert** », où **v** est la « **célérité** » de l'onde.

• Dans le cas du champ électromagnétique, cette célérité v est égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Des expériences (en électrostatique et magnétostatique) avaient permis de mesurer ε_0 et μ_0 ; par ailleurs, on commençait à avoir une bonne précision sur la mesure de la vitesse de la lumière c (L.Foucault en 1850) : l'identité entre la célérité des ondes électromagnétiques et c (ainsi que d'autres considérations, sur la polarisation en particulier) a permis à Maxwell d'affirmer le **caractère électromagnétique de la lumière**. On retiendra donc :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3.10^8\, m.s^{-1}}$$

III.3. SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE D'ALEMBERT

III.3.1. Onde plane

• **Définition 1:** un phénomène physique, auquel on aura associé une ou plusieurs grandeurs mathématiques (élongation d'un point d'une corde, température, champ électrique ou magnétique…), qui dépend de **l'espace ET du temps** , sera appelé **onde**.

Définition 2 : une onde f(x,t) est dite **PLANE** si, à tout instant, l'amplitude de f est constante sur tout plan perpendiculaire à une direction fixe.

Rq : en coordonnées cartésiennes , une onde plane ne dépendra que d'une variable d'espace.

• Sous forme d'onde plane, on montre que les solutions les plus générales de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

$\boxed{f(x,t)=g(x-vt)+h(x+vt)}$ (Ox étant la direction de propagation)

Rq1 : soit g(0) l'amplitude de l'onde g(x,t) en x=0 et à t=0 ; quel que soit x, il existe toujours un instant t tel que x-vt=0 ⇒ l'amplitude de l'onde vaudra à nouveau g(0) (en ce point d'abscisse x et à l'instant t) ⇒ la dépendance en $x \pm vt$ traduit une onde se propageant selon Ox **sans atténuation d'amplitude** : g et h sont dites « ondes planes **PROGRESSIVES** ».

Rq2 : g(x,t) est une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants, h(x,t) se propage quant à elle selon les x décroissants.

Rq3 : si la direction de propagation ne coïncide plus avec l'un des trois axes du repère cartésien d'étude, alors on écrira :
$\boxed{f(\vec{r},t)=g(\vec{r}\cdot\vec{n}-vt)+h(\vec{r}\cdot\vec{n}+vt)}$ (où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de la direction de propagation).

Rq4 : à l'opposé, on appellera « **onde STATIONNAIRE** » une onde où les variables de temps et d'espace seront **séparées,** c'est-à- dire telle que : $\boxed{f(\vec{r},t)=g(\vec{r})\times h(t)}$ ($\vec{r}=\overrightarrow{OM}$; O=origine) (pour des points tels que $g(\vec{r})$ =0, l'amplitude de l'onde stationnaire sera nulle quel que soit t : il n'y a plus propagation de cette amplitude).

III.3.2. Onde sphérique

• **Définition :** une onde f est dite « **sphérique** » si, à un instant t fixé, l'amplitude de f est constante sur une sphère quelconque (centrée sur un point O pris comme origine) ; on peut donc écrire : $f(\vec{r},t)=f(r,t)$ avec: $r=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

• Une onde sphérique vérifiant l'équation de d'Alembert sera telle que :

$$\boxed{f(r,t)=\frac{1}{r}\times g(r-vt)+\frac{1}{r}\times h(r+vt)}$$

Rq1 : g est une onde sphérique **divergente** (à partir de O), h une onde **convergente** (vers O).

Rq2 : contrairement à une onde plane, une onde sphérique se propage en **s'atténuant** (donc en se **déformant**) ; nous verrons que cette atténuation de l'**amplitude** ne traduit pas une absorption du milieu (ici, ce serait le vide…), mais correspond au contraire à la conservation de l'**énergie**.

IV. ONDE PLANE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE

IV.1. CAS PARTICULIER D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE

IV.1.1. Représentation complexe d'une O.P.P.M

• Considérons un champ électrique de type O.P.P.M ou O.P.P.H (« onde plane progressive monochromatique ou harmonique ») se propageant selon Ox ; on pourra écrire :

$$\boxed{\vec{E}=\begin{vmatrix} E_x=E_{0x}\cos(\omega t-kx+\varphi_x) \\ E_y=E_{0y}\cos(\omega t-kx+\varphi_y) \\ E_z=E_{0z}\cos(\omega t-kx+\varphi_z)\end{vmatrix}}$$

En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, il vient, selon Ox par exemple :

$-k^2E_x+(\frac{\omega^2}{c^2})E_x=0 \quad \forall E_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{k^2=\frac{\omega^2}{c^2}}$ = « **relation de dispersion** »

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.