# CH.29 : ONDES ELECTROMAGNETIQUES

**Plan** *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

**********************

**********************

# I. LES POSTULATS DE L'ELECTROMAGNETISME

## I.1. LOI DE FORCE DE LORENTZ

• Dans un référentiel (R), on définit une entité physique $(\vec{E},\vec{B})$ appelée « champ électromagnétique » telle qu'une particule (charge q, vitesse $\vec{v}_R$) qui s'y trouve placée subisse une force donnée par :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_R \wedge \vec{B})}$$

• Le but de l'électromagnétisme est de déterminer ce champ à partir de la distribution de charges et de courants ( $\rho$ et $\vec{j}$ ) qui le crée.

## I.2. LES EQUATIONS DE MAXWELL

A partir de résultats antérieurs (Gauss, Ampère, Faraday…) et de considérations personnelles, J.C Maxwell (1831-1879) a postulé les équations suivantes (publications de 1855 à 1864) :

∗ Equation de Maxwell-Gauss: $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = q_{\text{int}}/\varepsilon_0$

∗ Equation de Maxwell-flux: $div\vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

∗ Equation de Maxwell-Faraday: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\varphi}{dt}$

∗ Equation de Maxwell-Ampère: $\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Leftrightarrow \oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0(i_e + \iint_S \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S})$

## I.3. CONTENU PHYSIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

### *I.3.1. **Maxwell-Gauss*** (M.G)

• Les lignes du champ électrique peuvent diverger à partir de sources **ponctuelles** appelées **charges électriques** (= « monopôles » électriques).
• Le théorème de Gauss est applicable en régime **non permanent** (ceci n'a rien d'immédiat lorsqu'on démontre le théorème à partir de la loi de Coulomb, cette dernière n'étant alors plus valable).

### I.3.2. ***Maxwell-flux*** (M.$\Phi$)

• Le flux magnétique est **CONSERVATIF** (ce flux à travers toute surface coupant un même tube de champ est conservé).
• Les lignes de champ magnétique ne peuvent diverger à partir de sources ponctuelles : il n'existe **pas** de **monopôles magnétiques.**

### *I.3.3. **Maxwell-Faraday*** (M.F)

Au même titre que des charges électriques, un champ magnétique variable dans le temps donne naissance à un champ électrique ; mais la **circulation** de ce champ induit est **non nulle** sur un **contour fermé** (phénomène d'induction).

### I.3.4. Maxwell-Ampère (M.A)

• Au même titre que des courants de conduction (charges électriques en mouvement), un champ électrique non permanent engendre un champ magnétique (forme généralisée du **théorème d'Ampère**).

• Le terme $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est appelé « **courant de déplacement** » (traduction malheureuse de l'anglais, car il n'y a pas de déplacement de charges électriques…).

La démarche de Maxwell fut la suivante : pour tenir compte de la conservation de la charge, il introduisit un terme supplémentaire dans l'équation (M.A) initiale, soit :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D) \Rightarrow div(\overrightarrow{rot}\vec{B}) = 0 = div\vec{j} + div\vec{j}_D = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\vec{j}_D = -\frac{\partial(\varepsilon_0 div\vec{E})}{\partial t} + div\vec{j}_D \quad \text{(grâce à M.G)}$$

Les variables de temps et d'espace étant indépendantes, on permute les opérateurs, d'où :

$div(\vec{j}_D - \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = 0$ ; des considérations de cohérence interne de la théorie électromagnétique (aspect énergétique en particulier) et des confirmations expérimentales ont permis à Maxwell de retenir la solution la plus simple, soit : $\boxed{\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

## I.4. RELATIONS DE PASSAGE

On considère deux milieux (1) et (2) dont la surface de séparation (sa normale locale $\vec{n}_{1\to 2}$ étant orientée de (1) vers (2)) est porteuse d'une distribution de charges ($\sigma$ ,en $C.m^{-2}$) et de courants ($\vec{j}_S$, en $A.m^{-1}$) **surfaciques** ; on a, juste de part et d'autre de la surface de séparation, les conditions aux limites suivantes :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$$

Il y a donc **continuité** de la composante **tangentielle** de $\vec{E}$ et de la composante **normale** de $\vec{B}$

# II. EQUATIONS LIEES AUX POTENTIELS

## II.1. CHAMPS EN FONCTION DES POTENTIELS

$$\boxed{\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}} \qquad \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

où $\vec{A}$ est le « **potentiel-vecteur** » du champ électromagnétique $(\vec{E},\vec{B})$ et $V$ son « **potentiel scalaire** ».

## II.2. CHOIX D'UNE JAUGE

• Nous avons vu (chapitre 27) que le potentiel-vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,f$ (où f est une fonction quelconque) donne le même champ que $\vec{A}$ ; il en est de même pour $V' = V - \dfrac{\partial f}{\partial t}$ (il faut tenir compte du couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ désormais) vis-à-vis de $\vec{E}$.

• Faire le **choix** d'un couple de potentiels s'appelle « **choisir une JAUGE** » : nous allons en voir deux exemples après avoir établi les équations différentielles satisfaites par $\vec{A}$ et $V$ ; donc :

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = div(-\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = -\Delta V - \frac{\partial(div\vec{A})}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial(div\vec{A})}{\partial t} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial(-\overrightarrow{grad}V - \partial\vec{A}/\partial t)}{\partial t} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \overrightarrow{grad}(div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t}) \quad (2)$$

• Les équations (1) et (2) sont **couplées** ; on peut faire les choix suivants :

- ♦ **jauge de Coulomb :** $\boxed{div\vec{A} = 0}$ $\Rightarrow$ $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ : c'est l'équation de Poisson ,vue en statique, dont on connaît la solution ; mais dans l'équation (2), $\vec{A}$ et $V$ restent **couplés**.

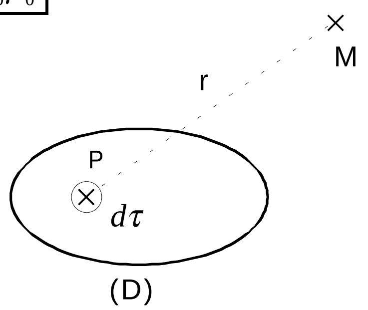
- ♦ **jauge de Lorentz :** $\boxed{div\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial V}{\partial t} = 0}$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j} = \vec{0} \\ &\Delta V - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \end{aligned} \quad (3) \text{ et } (4)$$

Les équations (3) et (4) sont alors **découplées** : les solutions sont connues sous le nom de « **potentiels retardés** ».

### II.3. SOLUTION DES POTENTIELS RETARDES

On considère un domaine (D), porteur de charges et de courant électriques ; en posant $\boxed{c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$ , les potentiels retardés sont donnés par :




$$\boxed{\begin{aligned} V(M,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_D \frac{\rho(P,t-r/c)}{r}d\tau \\ \vec{A}(M,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_D \frac{\vec{j}(P,t-r/c)}{r}d\tau \end{aligned}}$$

• On constate que les expressions de $\vec{A}$ et $V$ au point M, à **l'instant t**, dépendent de l'état des distributions de charges et de courants à **l'instant ANTERIEUR t-r/c** : ceci est compatible avec la Relativité Restreinte qui rejette la possibilité de propagation **instantanée** de phénomènes physiques (contrairement aux potentiels « coulombiens » ou « newtoniens ») ; la grandeur **c** apparaît ainsi comme une **vitesse de propagation** du champ électromagnétique mais nous reverrons cette notion plus loin.

• L'instant retardé t-r/c dépend du point P d'intégration, ce qui rend les calculs encore plus délicats : dans le cadre du programme, nous n'aurons pas à faire de tels calculs et nous ne reparlerons des potentiels retardés qu'à propos du « **rayonnement dipolaire** ».

# III. PROPAGATION DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

### III.1. APPROCHE QUALITATIVE

La possibilité de propagation d'une onde électromagnétique résulte du **couplage** des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans les équations de Maxwell ; supposons qu'en un point apparaisse un champ $\vec{E}$ : ce champ n'existant pas auparavant, il y a donc un « $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ » $\Rightarrow$ obtention d'un « $\overrightarrow{rot}\vec{B}$ » qui affecte le point considéré et son **voisinage** (par l'intermédiaire des dérivées spatiales) ; en ces points voisins, un champ magnétique est né, donc un « $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ » $\Rightarrow$ génération d'un « $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ » qui affecte le voisinage etc...Ainsi, de proche en proche, la perturbation initiale peut se propager sous forme d'un champ électromagnétique.

## III.2. EQUATION DE PROPAGATION DANS LE VIDE

• Dans le **vide**, en l'absence de charges et de courants, les équations de Maxwell se simplifient et l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\vec{E}) = \overrightarrow{grad}(div\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} = \overrightarrow{rot}(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\vec{B})}{\partial t} = -\frac{\partial(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})}{\partial t} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$ ; d'où :

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$ De même : $$\boxed{\Delta\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

• On vérifiera qu'avec la jauge de Lorentz, les potentiels $V$ et $\vec{A}$ satisfont à la même équation ; cette équation aux dérivées partielles est du type :

$\boxed{\Delta f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$ ; elle porte le nom de « **équation de propagation** » ou « **équation de d'Alembert** », où **v** est la « **célérité »** de l'onde.

• Dans le cas du champ électromagnétique, cette célérité v est égale à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. Des expériences (en électrostatique et magnétostatique) avaient permis de mesurer $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ ; par ailleurs, on commençait à avoir une bonne précision sur la mesure de la vitesse de la lumière c (L.Foucault en 1850) : l'identité entre la célérité des ondes électromagnétiques et c (ainsi que d'autres considérations, sur la polarisation en particulier) a permis à Maxwell d'affirmer le **caractère électromagnétique de la lumière**. On retiendra donc :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \simeq 3.10^8 m.s^{-1}}$$

## III.3. SOLUTIONS PARTICULIERES DE L'EQUATION DE D'ALEMBERT

### *III.3.1. Onde plane*

• **Définition 1:** un phénomène physique, auquel on aura associé une ou plusieurs grandeurs mathématiques (élongation d'un point d'une corde, température, champ électrique ou magnétique...), qui dépend de **l'espace ET du temps** , sera appelé **onde**.

**Définition 2 :** une onde f(x,t) est dite **PLANE** si, à tout instant, l'amplitude de f est constante sur tout plan perpendiculaire à une direction fixe.

**Rq :** en coordonnées cartésiennes , une onde plane ne dépendra que d'une variable d'espace.

• Sous forme d'onde plane, on montre que les solutions les plus générales de l'équation de d'Alembert sont de la forme :

$\boxed{f(x,t) = g(x - vt) + h(x + vt)}$ (Ox étant la direction de propagation)

**Rq1 :** soit g(0) l'amplitude de l'onde g(x,t) en x=0 et à t=0 ; quel que soit x, il existe toujours un instant t tel que x-vt=0 ⇒ l'amplitude de l'onde vaudra à nouveau g(0) (en ce point d'abscisse x et à l'instant t) ⇒ la dépendance en $x \pm vt$ traduit une onde se propageant selon Ox **sans atténuation d'amplitude** : g et h sont dites « ondes planes **PROGRESSIVES** ».

**Rq2 :** g(x,t) est une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants, h(x,t) se propage quant à elle selon les x décroissants.

**Rq3 :** si la direction de propagation ne coïncide plus avec l'un des trois axes du repère cartésien d'étude, alors on écrira :
$\boxed{f(\vec{r},t) = g(\vec{r} \cdot \vec{n} - vt) + h(\vec{r} \cdot \vec{n} + vt)}$ (où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de la direction de propagation).

**Rq4 :** à l'opposé, on appellera « **onde STATIONNAIRE** » une onde où les variables de temps et d'espace seront **séparées,** c'est-à- dire telle que : $\boxed{f(\vec{r},t) = g(\vec{r}) \times h(t)}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ ; O=origine)
(pour des points tels que $g(\vec{r})$ =0, l'amplitude de l'onde stationnaire sera nulle quel que soit t : il n'y a plus propagation de cette amplitude).

#### *III.3.2. <u>Onde sphérique</u>*

• **<u>Définition</u> :** une onde f est dite « **sphérique** » si, à un instant t fixé, l'amplitude de f est constante sur une sphère quelconque (centrée sur un point O pris comme origine) ; on peut donc écrire : $f(\vec{r},t) = f(r,t)$ avec: $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

• Une onde sphérique vérifiant l'équation de d'Alembert sera telle que :

$$\boxed{f(r,t) = \frac{1}{r} \times g(r - vt) + \frac{1}{r} \times h(r + vt)}$$

**Rq1 :** g est une onde sphérique **divergente** (à partir de O), h une onde **convergente** (vers O).

**Rq2 :** contrairement à une onde plane, une onde sphérique se propage en **s'atténuant** (donc en se **déformant**) ; nous verrons que cette atténuation de l'**amplitude** ne traduit pas une absorption du milieu (ici, ce serait le vide…), mais correspond au contraire à la conservation de l'**énergie**.

# IV. ONDE PLANE PROGRESSIVE ELECTROMAGNETIQUE

## IV.1. <u>CAS PARTICULIER D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE</u>

#### *IV.1.1. <u>Représentation complexe d'une O.P.P.M</u>*

• Considérons un champ électrique de type O.P.P.M ou O.P.P.H (« onde plane progressive monochromatique ou harmonique ») se propageant selon Ox ; on pourra écrire :

$$\boxed{\vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kx + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_z = E_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{array} \right.}$$

En injectant cette expression dans l'équation de d'Alembert, il vient, selon Ox par exemple :

$$-k^2 E_x + (\frac{\omega^2}{c^2}) E_x = 0 \quad \forall E_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$ = « **<u>relation de dispersion</u>** »