CH.27 : MAGNETOSTATIQUE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

I. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR DES COURANTS 1
I.1. INTERACTION MAGNETIQUE 1
I.2. FORCE DE LORENTZ 2
I.3. FORCE DE LAPLACE 2
II. LES EQUATIONS LOCALES DE LA MAGNETOSTATIQUE 2
II.1. CONSERVATION DE LA CHARGE 2
II.2. EQUATION RELATIVE AU FLUX DE B 3
II.3. EQUATION RELATIVE A LA CIRCULATION DE B 3
III. NOTION DE POTENTIEL-VECTEUR 4
III.1. DEFINITION 4
III.2. INDETERMINATION DE **A** 4
III.3. EQUATION DE POISSON DE LA MAGNETOSTATIQUE 4
IV. EXPRESSION GENERALE DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE 4
IV.1. EXPRESSION GENERALE DU POTENTIEL-VECTEUR 4
IV.2. LOI DE BIOT ET SAVART 5
V. METHODES DE CALCUL D'UN CHAMP MAGNETOSTATIQUE 5
V.1. ETUDE DES INVARIANCES ET SYMETRIES 5
V.2. CHOIX D'UN THEOREME 6
VI. NOTION DE DIPOLE MAGNETIQUE 7
VI.1. MOMENT DIPOLAIRE MAGNETIQUE 7
VI.2. POTENTIEL-VECTEUR D'UN DIPOLE MAGNETIQUE 7
VI.2.1. Définition d'un dipôle magnétique 7
VI.2.2. Potentiel-vecteur d'un dipôle magnétique. 7
VI.3. CHAMP MAGNETIQUE A GRANDE DISTANCE DU DIPOLE 7
VI.3.1. Composantes du champ 7
VI.3.2. Lignes de champ 8
VI.4. ACTIONS SUBIES PAR UN DIPOLE MAGNETIQUE 8
VI.4.1. Champ magnétique extérieur uniforme 8
VI.4.2. Champ extérieur non-uniforme 9

****

I. ACTION D'UN CHAMP MAGNETIQUE SUR DES COURANTS

I.1. INTERACTION MAGNETIQUE

L'interaction magnétique peut toujours être décrite comme l'action d'un courant permanent (qui ne dépend pas du temps) sur un autre courant permanent ; pour Ampère (1775-1836), le fonctionnement des aimants pouvait s'interpréter par la présence de courants microscopiques dans les matériaux aimantés (**« courants ampériens »**) :l'étude de ces milieux montre que cette conception n'est pas si éloignée des idées actuelles, où l'on peut assimiler le mouvement des électrons autour du noyau à des boucles de courant.

 Christian MAIRE

I.2. FORCE DE LORENTZ

De manière générale, considérons une particule de charge q, de vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel (R) où règne un champ électromagnétique (ensemble de 2 champs vectoriels $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ respectivement champ électrique et champ magnétique) ; le champ électromagnétique est accessible à l'expérience par son action sur cette particule, action donnée par la **loi de Lorentz** :

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$ où $\vec{B}$ est en Tesla (**T**)

Rq : $\vec{B}$ est défini à partir de la force et de la vitesse par un produit vectoriel, dont le résultat dépend d'une convention d'orientation des rotations dans l'espace (rappelons que ça n'est pas le cas pour $\vec{E}$) ;on dira que $\vec{B}$ est un « **pseudo-vecteur** » ou « **vecteur axial** ».Nous verrons plus loin que les règles de symétrie s'appliquant à $\vec{B}$ n'obéissent pas au **Principe de Curie** (chapitre 26).

I.3. FORCE DE LAPLACE

Considérons un tronçon de circuit filiforme de longueur élémentaire $d\vec{l}$,vecteur dont le sens définit l'orientation positive de l'intensité i qui parcourt le fil, ce tronçon étant placé dans un champ magnétostatique $\vec{B}$; le tronçon de circuit est alors soumis à une force résultante, appelée **force de Laplace,** dont l'expression est :

$$\boxed{d\vec{F}_{Lap} = id\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

Rq1 : l'origine de cette force est la force de Lorentz qui s'applique aux porteurs de charge contenus dans le fil; lors des « chocs » avec les ions du réseau cristallin, cette force est transmise au fil lui-même (la force de Laplace apparaît comme la forme « macroscopique » de la force de Lorentz). Ainsi, en appelant S la section du fil, on a :

$$id\vec{l} = (\vec{j} \cdot \vec{S})d\vec{l} = \vec{j}(\vec{S} \cdot d\vec{l}) = \vec{j}d\tau$$

où $d\tau$ est le volume du tronçon de fil considéré et $\vec{j}$ est supposé uniforme sur S

$$\vec{j} = \rho_{mobile}\vec{v} \text{ et } dq = \rho_{mobile}d\tau \text{ (=charge élémentaire mobile du tronçon)} \Rightarrow d\vec{F}_{Lap} = dq\vec{v} \wedge \vec{B}$$

(cf. force de Lorentz, avec $\vec{E} = \vec{0}$,s'appliquant aux charges mobiles contenues dans $d\tau$).

Rq2 : cependant, lorsqu'on exprime la puissance de la force de Lorentz purement magnétique, on constate qu'elle est nulle (« un champ magnétique ne travaille pas »), à cause du produit mixte en $\vec{v}$; par ailleurs, la force de Laplace « travaille » (heureusement pour les alternateurs et les machines à courant continu !). Il n'y a là qu'un paradoxe apparent, car, dans un bilan complet, il faut prendre en compte la puissance $P_{électrique}$ du générateur qui fait circuler le courant i (cf. chapitre 28 sur l'induction).

II. LES EQUATIONS LOCALES DE LA MAGNETOSTATIQUE

II.1. CONSERVATION DE LA CHARGE

Soit (S) une surface fermée, fixe dans le référentiel d'étude,(=« **surface de contrôle** »), orientée vers l'extérieur et soit (V) le volume délimité par (S) (=« **volume de contrôle** ») ; on note q(t) la charge totale contenue dans (V) à l'instant t, $\vec{j}(\vec{r},t)$ sera la densité de courant et $\rho(\vec{r},t)$ la densité volumique de charge.

On fait un **bilan de charge** en s'intéressant à la variation temporelle de q(t), soit dq/dt ; de manière générale, les deux causes en sont :

- un terme de **TRANSFERT** à travers la surface de contrôle : ici, il s'agit du courant i algébriquement **rentrant**.
- un terme éventuel de **PRODUCTION** locale ($\succ 0$ ou $\prec 0$) : ici, ce terme est nul, conformément au Principe de conservation de la charge, qui n'a jamais été invalidé (même lorsque l'on crée des particules à partir d'énergie pure, la charge algébrique totale de ces particules reste nulle, puisque l'énergie initiale est non chargée).

On a donc :

$$dq/dt = i_{\text{rentrant}} = -i_{\text{sortant}} = -\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\iiint_V (div\vec{j})d\tau$$

(par application du **théorème de Green-Ostrogradski**, avec i_{sortant} car le théorème impose un $d\vec{S}$ sortant).

Par ailleurs :

$$q(t) = \iiint_V \rho(\vec{r},t)d\tau \Rightarrow dq/dt = \iiint_V (\partial\rho/\partial t)d\tau = -\iiint_V (div\vec{j})d\tau$$

L'égalité précédente étant vraie $\forall$ (V), aussi petit que l'on veut, il vient la relation :

$$\boxed{div\vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0}$$

C'est la relation **LOCALE** de conservation de la charge.

Rq1 : nous avons pu permuter l'ordre des opérations (dérivation temporelle et intégration spatiale) car ces deux opérations sont linéaires et les variables de temps et d'espace sont **indépendantes** ; sous l'intégrale d'espace, il faut utiliser un « ∂ » puisque ρ dépend à priori de $\vec{r}$ ET de t.

Rq2 : en **REGIME PERMANENT**, il vient :

$\boxed{div\vec{j} = 0}$ $\vec{j}$ est alors à **FLUX CONSERVATIF**

II.2. EQUATION RELATIVE AU FLUX DE B

L'expérience montre que le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée (S) quelconque est nul :

$$\boxed{\forall(S),\quad \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad div\vec{B} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{B}\text{ est à FLUX CONSERVATIF}}$$

II.3. EQUATION RELATIVE A LA CIRCULATION DE B

Historiquement, l'expérience avait permis d'établir le « **théorème d'Ampère** » ; en désignant par I_e l'intensité totale des courants permanents « **enlacés »** par un contour (C), la circulation de $\vec{B}$ le long de (C) est donnée par :

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_e \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}}$$

avec : $I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ où (S) est une surface orientée s'appuyant sur (C)

Rq1 : l'équivalence précédente est obtenue grâce au théorème de **Stokes-Ampère.**