



Suites et séries de fonctions

Sommaire

I	Convergence simple ou uniforme	2
II	Propriétés des suites de fonctions convergentes	4
III	Approximations uniformes classiques	6
IV	Convergence simple des séries de fonctions	7
V	Séries de fonctions : autres modes de convergence	8
VI	Propriétés des séries de fonctions convergentes	10

I Convergence simple ou uniforme

On considère des applications définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées de I dans \mathbb{K} .

C'est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ de toutes les fonctions de I dans \mathbb{K} .

C'est un espace vectoriel normé quand on le munit de la norme dite *de la convergence uniforme* et définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$.

Définition (Convergence simple)

On dit que la suite (f_n) est simplement convergente (en abrégé CVS) si pour tout x de I la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente dans \mathbb{K} .

Si on pose, pour tout x de I , $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, on dit que l'application $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est la *limite simple* de la suite (f_n) .

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

On notera que l'entier n_0 est fonction à la fois de ε et de x .

Définition (Convergence uniforme)

On dit que la suite (f_n) est *uniformément convergente* (en abrégé CVU) s'il existe une application $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

- À partir d'un certain rang, $f_n - g$ appartient à $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$.

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq n_0, \|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon, \text{ ou encore :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

On notera que l'entier n_0 est fonction seulement de ε .

Définition (Convergence sur un sous-intervalle)

Soit J un sous-intervalle de I .

- On dit que la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur J si la suite des restrictions des f_n à J est simplement (resp. uniformément) convergente.
- On dit que la suite (f_n) est uniformément convergente *sur tout compact* si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[a, b]$.

**Remarques**

- Bien sûr, si la suite (f_n) est uniformément convergente vers g sur I , elle converge uniformément sur tout compact vers g et elle est simplement convergente vers g sur I . Les réciproques sont fausses.
- En général, on commence par vérifier que la suite (f_n) converge simplement, sur I , vers une fonction g . On examine ensuite si la convergence est uniforme sur I , ou sinon sur certains sous-intervalles J de I .
- Si on sait que la suite (f_n) converge simplement sur I vers g et si pour tout entier n , au moins à partir d'un certain rang, on sait trouver un élément x_n de I tel que la suite $f_n(x_n) - g(x_n)$ ne converge pas vers 0, alors il n'y a pas convergence uniforme sur I .

Proposition (*Critère de Cauchy de convergence uniforme*)

La suite (f_n) est uniformément convergente sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{cases}, \begin{cases} f_{n+p} - f_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) \\ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \end{cases}$$

Cela équivaut à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \\ \forall x \in I \end{cases}, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

II Propriétés des suites de fonctions convergentes

Proposition (*Convergence des suites de fonctions à valeurs complexes*)

Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{C} .

Soient g_n et h_n les fonctions réelles définies par $g_n = \operatorname{Re}(f_n)$ et $h_n = \operatorname{Im}(f_n)$.

De même, soient g et h les fonctions réelles définies par $f = g + ih$.

La suite (f_n) converge simplement vers $f \Leftrightarrow$:

– La suite (g_n) converge simplement vers g .

– La suite (h_n) converge simplement vers h .

(même résultat avec la convergence uniforme et la convergence uniforme sur tout compact.)

Proposition (*Limites et convergence uniforme*)

On suppose que la suite des fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I , vers une application g .

Soit a un élément de I . On suppose que pour tout entier n , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lambda_n$.

Dans ces conditions :

– La suite (λ_n) est convergente vers un élément λ de \mathbb{K} .

– La limite de g en a existe et : $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

On peut exprimer ce résultat en écrivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \text{ (interversion des limites.)}$$

Proposition (*Continuité et convergence uniforme*)

Si la suite de fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I , et si les applications f_n sont continues en un point a de I , alors la limite g est continue en a .

Bien sûr, si les (f_n) sont continues sur I , g est continue sur I .

Ces propriétés restent vraies en cas de convergence uniforme sur tout compact.

Remarque

On peut utiliser cette propriété pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :

Si la suite (f_n) converge simplement vers g , si les f_n sont continues en un point a , mais si g n'est pas continue en a , alors il n'y a pas convergence uniforme.

Proposition (*Convergence uniforme et intégration*)

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, uniformément convergente sur tout compact de I vers une application g . Soit a un point quelconque de I .

La suite des fonctions $F_n : x \rightarrow \int_a^x f_n(t) dt$ est uniformément convergente, sur tout compact de l'intervalle I , vers l'application $G : x \rightarrow \int_a^x g(t) dt$.

En particulier, pour tous points a et b de I : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$.