Suites et séries de fonctions

Sommaire

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

I Convergence simple ou uniforme

On considère des applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On note $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications bornées de I dans $\mathbb{K}$.

C'est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ de toutes les fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

C'est un espace vectoriel normé quand on le munit de la norme dite *de la convergence uniforme* et définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \|f(x)\|$.

Définition *(Convergence simple)*

On dit que la suite (f_n) est simplement convergente (en abrégé CVS) si pour tout x de I la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente dans $\mathbb{K}$.

Si on pose, pour tout x de I, $g(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, on dit que l'application $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est la *limite simple* de la suite (f_n).

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

On notera que l'entier n_0 est fonction à la fois de ε et de x.

Définition *(Convergence uniforme)*

On dit que la suite (f_n) est *uniformément convergente* (en abrégé CVU) s'il existe une application $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle que :
- À partir d'un certain rang, $f_n - g$ appartient à $B(I, \mathbb{K})$.
- $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - g\|_\infty = 0$.

Remarque

Avec les notations précédentes, l'application g est définie sur I par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \|f_n - g\|_\infty \leq \varepsilon$, ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \forall x \in I, |f_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$.

On notera que l'entier n_0 est fonction seulement de ε.

Définition *(Convergence sur un sous-intervalle)*

Soit J un sous-intervalle de I.
- On dit que la suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) sur J si la suite des restrictions des f_n à J est simplement (resp. uniformément) convergente.
- On dit que la suite (f_n) est uniformément convergente *sur tout compact* si, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la suite (f_n) est uniformément convergente sur $[a, b]$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Remarques

- Bien sûr, si la suite (f_n) est uniformément convergente vers g sur I, elle converge uniformément sur tout compact vers g et elle est simplement convergente vers g sur I. Les réciproques sont fausses.
- En général, on commence par vérifier que la suite (f_n) converge simplement, sur I, vers une fonction g. On examine ensuite si la convergence est uniforme sur I, ou sinon sur certains sous-intervalles J de I.
- Si on sait que la suite (f_n) converge simplement sur I vers g et si pour tout entier n, au moins à partir d'un certain rang, on sait trouver un élément x_n de I tel que la suite $f_n(x_n) - g(x_n)$ ne converge pas vers 0, alors il n'y a pas convergence uniforme sur I.

Proposition *(Critère de Cauchy de convergence uniforme)*

La suite (f_n) est uniformément convergente sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad \begin{cases} f_{n+p} - f_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) \\ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \end{cases}$$

Cela équivaut à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } \begin{cases} \forall n \geq n_0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \\ \forall x \in I \end{cases}, \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

II Propriétés des suites de fonctions convergentes

Proposition *(Convergence des suites de fonctions à valeurs complexes)*

Soit (f_n) une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Soient g_n et h_n les fonctions réelles définies par $g_n = \mathrm{Re}\,(\mathrm{f_n})$ et $h_n = \mathrm{Im}\,(f_n)$.

De même, soient g et h les fonctions réelles définies par $f = g + ih$.

La suite (f_n) converge simplement vers $f \Leftrightarrow$:
- La suite (g_n) converge simplement vers g.
- La suite (h_n) converge simplement vers h.

(même résultat avec la convergence uniforme et la convergence uniforme sur tout compact.)

Proposition *(Limites et convergence uniforme)*

On suppose que la suite des fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I, vers une application g.

Soit a un élément de I. On suppose que pour tout entier n, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda_n$.

Dans ces conditions :
- La suite (λ_n) est convergente vers un élément λ de $\mathbb{K}$.
- La limite de g en a existe et : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n$.

On peut exprimer ce résultat en écrivant :

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ (interversion des limites.)

Proposition *(Continuité et convergence uniforme)*

Si la suite de fonctions $f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est uniformément convergente sur I, et si les applications f_n sont continues en un point a de I, alors la limite g est continue en a.

Bien sûr, si les (f_n) sont continues sur I, g est continue sur I.

Ces propriétés restent vraies en cas de convergence uniforme sur tout compact.

Remarque

On peut utiliser cette propriété pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :

Si la suite (f_n) converge simplement vers g, si les f_n sont continues en un point a, mais si g n'est pas continue en a, alors il n'y a pas convergence uniforme.

Proposition *(Convergence uniforme et intégration)*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, uniformément convergente sur tout compact de I vers une application g. Soit a un point quelconque de I.

La suite des fonctions $F_n : x \to \displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ est uniformément convergente, sur tout compact de l'intervalle I, vers l'application $G : x \to \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$.

En particulier, pour tous points a et b de I : $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.