III Endomorphismes symétriques ou orthogonaux

Dans cette partie E est *euclidien*, c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie.

III.1 Adjoint d'un endomorphisme

Proposition *(Représentation des formes linéaires)*

Soit a un vecteur de E. L'application $x \mapsto f_a(x) =< a, x >$ est une forme linéaire sur E dont le noyau est E si $a = 0$ et l'hyperplan $(\mathbb{K}a)^\perp$ si a est non nul.

Réciproquement, si f est une forme linéaire sur E , il existe un vecteur unique a de E tel que $f = f_a$, c'est-à-dire tel que : $\forall x \in E, f(x) =< a, x >$.

L'application $a \mapsto f_a$ est un isomorphisme de E sur son dual E^*.

Proposition et définition *(Adjoint d'un endomorphisme)*

Soit f un endomorphisme de E.

Il existe un unique endomorphisme g de E tel que $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), y >=< x, g(y) >$.

On le note $g = f^*$, et on l'appelle l'*adjoint* de f.

Proposition *(Propriétés de l'adjonction)*

Pour tous endomorphismes f et g de E, et pour tous réels α et β :

$$\begin{cases} f^{**} = f & \text{L'adjonction est donc un mécanisme involutif} \\ (\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^* & \text{L'adjonction est un endomorphisme de } \mathcal{L}(E) \\ (g \circ f)^* = f^* \circ g^* \end{cases}$$

III.2 Endomorphismes orthogonaux

Proposition et définition *(Endomorphismes orthogonaux)*

Soit f un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f conserve la norme : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.
- f conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y >$.
- f transforme toute b.o.n. de E en une b.o.n. de E.
- f transforme au moins une b.o.n. de E en une b.o.n. de E.
- f est un automorphisme de E et $f^* = f^{-1}$.

Si f vérifie ces propriétés, on dit que f est un *endomorphisme orthogonal* de E (ou encore une *isométrie vectorielle* de E).

Définition et proposition *(Le groupe orthogonal)*

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

C'est un groupe pour la loi $\circ$, appelé *groupe orthogonal* de E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.