II Orthogonalité

Dans ce paragraphe, E est un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Vecteurs orthogonaux

Définition

Deux vecteurs x et y de E sont dits *orthogonaux* si $< x, y >= 0$.

Remarques

- La définition est symétrique en x, y car $< y, x >= \overline{< x, y >}$.
- Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

  A fortiori, le seul vecteur u qui est orthogonal à tous les vecteurs de E est $u = 0$.

Définition

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

On dit que cette famille est *orthogonale* si pour tous indices i, j distincts de I, $< u_i, u_j >= 0$, c'est-à-dire si les vecteurs de la famille sont orthogonaux deux à deux.

Si de plus les u_i sont unitaires, la famille est dite *orthonormée* ou *orthonormale*.

Remarques

- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormée $\Leftrightarrow$, pour tous indices i, j de I :

  $$< u_i, u_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \textit{(Notation de Kronecker)}$$

- Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale et constituée de vecteurs non nuls alors c'est une famille libre.
- Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est orhonormée et est une base de E, on dit qu'elle constitue une *base orthonormée* (b.o.n.) de E.
- Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille orthogonale de E.

  Alors $\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$ *(Théorème de Pythagore)*

  La réciproque n'est vraie que si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

  Autrement dit, deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien réel sont orthogonaux si et seulement s'ils vérifient $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.