

I Produit scalaire

I.1 Définition et premières propriétés

Définition

On dit que l'application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ est un *produit scalaire* si :

- (a) $\forall (x, x', y, y') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,$
 $f(\alpha x + \beta x', y) = \bar{\alpha} f(x, y) + \bar{\beta} f(x', y)$ (*semi-linéarité à gauche*)
 $f(x, \alpha y + \beta y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$ (*linéarité à droite*).
- (b) $\forall (x, y) \in E^2, f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ (*symétrie hermitienne*).
- (c) $\forall x \in E, f(x, x) \in \mathbb{R}^+$ (on dit que f est *positive*).
- (d) $\forall x \in E, f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (on dit que f est *définie*).

Définition

Un \mathbb{K} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien* (réel ou complexe suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Un espace *hermitien* est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques

- La propriété (a) s'énonce en disant que f est une *forme sesquilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou une *forme bilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on exprime (b) en disant que f est *symétrique* : $f(y, x) = f(x, y)$.

Un produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive. De même un produit scalaire sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le caractère hermitien de f implique : $\forall x \in E, f(x, x) \in \mathbb{R}$.
 Mais dans ce cas la précision supplémentaire $f(x, x) \in \mathbb{R}^+$ reste utile.
- Si le caractère hermitien de f est établi, la linéarité à droite équivaut à la semi-linéarité à gauche : le (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(x, y)$, on note souvent $\langle x, y \rangle$, ou $x \cdot y$, ou $(x | y)$, etc.

Avec la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :

$$\forall (x, x', y, y') \in E^4, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$$

$$\begin{cases} \langle \alpha x + \beta x', y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x', y \rangle \\ \langle x, \alpha y + \beta y' \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, y' \rangle \\ \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad ; \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad ; \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Proposition (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Alors $\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$.

Il y a égalité $\Leftrightarrow x$ et y sont liés.