I Produit scalaire

I.1 Définition et premières propriétés

Définition

On dit que l'application $f: E \times E \to \mathbb{K}$ est un *produit scalaire* si :
- (a) $\forall (x, x', y, y') \in E^4$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,
  $f(\alpha x + \beta x', y) = \bar{\alpha} f(x, y) + \bar{\beta} f(x', y)$ (*semi-linéarité à gauche*)
  $f(x, \alpha y + \beta y') = \alpha f(x, y) + \beta f(x, y')$ (*linéarité à droite*).
- (b) $\forall (x, y) \in E^2$, $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ (*symétrie hermitienne*).
- (c) $\forall x \in E$, $f(x, x) \in \mathbb{R}^+$ (on dit que f est *positive*).
- (d) $\forall x \in E$, $f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (on dit que f est *définie*).

Définition

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien* (*réel* ou *complexe* suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Un espace *hermitien* est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques

- La propriété (a) s'énonce en disant que f est une *forme sesquilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou une *forme bilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on exprime (b) en disant que f est *symétrique* : $f(y, x) = f(x, y)$.

  Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive. De même un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le caractère hermitien de f implique : $\forall x \in E, f(x, x) \in \mathbb{R}$.

  Mais dans ce cas la précision supplémentaire $f(x, x) \in \mathbb{R}^+$ reste utile.
- Si le caractère hermitien de f est établi, la linéarité à droite équivaut à la semi-linéarité à gauche : le (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(x, y)$, on note souvent $< x, y >$, ou $x \cdot y$, ou $(x \mid y)$, etc.

  Avec la notation $< \cdot, \cdot >$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :
  $\forall (x, x', y, y') \in E^4$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{cases} < \alpha x + \beta x', y >= \bar{\alpha} < x, y > + \bar{\beta} < x', y > \\ < x, \alpha y + \beta y >= \alpha < x, y > + \beta < x, y' > \\ < y, x >= \overline{< x, y >} \quad ; \quad < x, x > \geq 0 \quad ; \quad < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Proposition *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E.

Alors $\forall x, y \in E$, $\quad |< x, y >|^2 \leq < x, x >< y, y >$.

Il y a égalité $\Leftrightarrow$ x et y sont liés.