I Produit scalaire

I.1 Définition et premières propriétés

Définition

On dit que l'application $f : E \times E \to \mathbb{K}$ est un *produit scalaire* si :
- (a) $\forall (x,x',y,y') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$,
  $f(\alpha x+\beta x',y) = \bar{\alpha} f(x,y) + \bar{\beta} f(x',y)$ (*semi-linéarité à gauche*)
  $f(x,\alpha y+\beta y') = \alpha f(x,y) + \overline{\beta} f(x,y')$ (*linéarité à droite*).
- (b) $\forall (x,y) \in E^2$, $f(y,x) = \overline{f(x,y)}$ (*symétrie hermitienne*).
- (c) $\forall x \in E$, $f(x,x) \in \mathbb{R}^+$ (on dit que f est *positive*).
- (d) $\forall x \in E$, $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (on dit que f est *définie*).

Définition

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est dit *préhilbertien* (*réel* ou *complexe* suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Un espace *hermitien* est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques

- La propriété (a) s'énonce en disant que f est une *forme sesquilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ou une *forme bilinéaire* (quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
- Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on exprime (b) en disant que f est *symétrique* : $f(y,x) = f(x,y)$.

  Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est donc une forme bilinéaire symétrique définie positive. De même un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le caractère hermitien de f implique : $\forall x \in E, f(x,x) \in \mathbb{R}$.

  Mais dans ce cas la précision supplémentaire $f(x,x) \in \mathbb{R}^+$ reste utile.
- Si le caractère hermitien de f est établi, la linéarité à droite équivaut à la semi-linéarité à gauche : le (a) de la définition peut alors être simplifié.
- Plutôt que de noter $f(x,y)$, on note souvent $< x,y >$, ou $x \cdot y$, ou $(x \mid y)$, etc.

  Avec la notation $< \cdot,\cdot >$, que nous utiliserons, la définition d'un produit scalaire devient :
  $\forall (x,x',y,y') \in E^4$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$

$$\begin{cases} < \alpha x+\beta x',y > = \bar{\alpha} < x,y > + \bar{\beta} < x',y > \\ < x,\alpha y+\beta y' > = \overline{\alpha} < x,y > + \beta < x,y' > \\ < y,x > = \overline{< x,y >} \quad ; \quad < x,x > \geq 0 \quad ; \quad < x,x > = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

Proposition *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit $< \cdot,\cdot >$ un produit scalaire sur E.

Alors $\forall x,y \in E, \quad | < x,y > |^2 \leq < x,x >< y,y >$.

Il y a égalité $\Leftrightarrow$ x et y sont liés.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 4 pages.