I Applications continûment différentiables

I.1 Applications coordonnées

- Conformément au programme de la classe de PC, les applications considérées ici sont définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq p \leq 3$, et $1 \leq n \leq 3$.
- Les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ sont munis d'une norme, notée $\|\cdot\|$ dans les deux cas.
  Avec par exemple $p = 3$, on pourra choisir de poser pour tout $M = (x, y, z)$ de Ω :

$$\|M\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

$$\text{ou } \|M\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } \|M\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|)$$

- Avec par exemple $p = 2$ et $n = 3$, on notera :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega : f(M) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

  Les applications f_1, f_2, f_3, qui sont définies sur Ω et à valeurs réelles, sont appelées *applications coordonnées* de f.

I.2 Applications partielles

Définition

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, avec par exemple $p = 3$.
Soit $M = (a, b, c)$ un point de Ω, et $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.
L'application φ qui au réel t associe $\varphi(t) = f(M + tu) = f(a + t\alpha, b + t\beta, c + t\gamma)$ est appelée *application partielle* de f, au point M, suivant le vecteur u.

Remarques

- L'application φ est définie sur un certain ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
- On note par exemple que $f(M + u) - f(M) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Cas particulier

Chacun des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, et $e_3 = (0, 0, 1)$ définit une application partielle au point M, appelée j-ème application partielle φ_j en M, (avec $1 \leq j \leq p$).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi_1(t) = f(M + te_1) = f(a + t, b, c) \\ \varphi_2(t) = f(M + te_2) = f(a, b + t, c) \\ \varphi_3(t) = f(M + te_3) = f(a, b, c + t) \end{cases}$$

I.3 Continuité

Définition

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit A un point de Ω.
On dit que f est continue en A si $\lim\limits_{A} f = f(A)$, c'est-à-dire si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,$ tel que $(\|M - A\| \leq \alpha$ et $M \in \Omega) \Rightarrow \|f(M) - f(A)\| \leq \varepsilon$

Proposition (Continuité et applications partielles)

L'application f est continue en un point A de Ω si et seulement si chacune de ses applications coordonnées $f_1, f_2, \ldots, f_p$ est continue en A.

Remarque

Cette propriété montre que pour la continuité, on peut toujours se ramener à des applications de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition (Continuité et applications partielles)

Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Soit A un point de Ω. On suppose que f est continue en A.
Alors toute application partielle $t \mapsto \varphi(t) = f(A + tu)$ de f en A est continue en 0.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse !

Voici deux exemples classiques, à connaître :

- $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, avec $f(0, 0) = 0$.
  On observe en effet que $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$.
  En revanche $\lim\limits_{t \to 0} f(t, t) = \dfrac{1}{2}$. L'application partielle de f suivant le vecteur $(1, 1)$ n'est donc pas continue à l'origine, ce qui implique que f n'est pas continue au point $(0, 0)$.
  On pouvait également noter que : $f(x, y) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \cos\theta\sin\theta$ (quantité qui ne tend pas vers 0 indépendamment de θ quand ρ tend vers 0 !).
- $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$, avec $f(0, 0) = 0$.
  On observe que $\lim\limits_{x \to 0} f(x, 0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0, y) = 0$.
  Plus généralement $\lim\limits_{t \to 0} f(ta, tb) = 0$, ce qui signifie que l'application partielle de f, suivant un vecteur quelconque (a, b), est continue à l'origine.
  En revanche $\lim\limits_{t \to 0} f(t^2, t) = \dfrac{1}{2}$.
  L'application f n'est donc pas continue au point $(0, 0)$.