



# Fonctions de plusieurs variables

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Applications continûment différentiables</b>	<b>2</b>
I.1	Applications coordonnées	2
I.2	Applications partielles	2
I.3	Continuité	3
I.4	Dérivée suivant un vecteur	4
I.5	Applications continûment différentiables	5
I.6	Matrice Jacobienne	6
I.7	DL d'ordre 1 d'une application $C^1$ (complément)	7
<b>II</b>	<b>Opérations sur les applications de classe <math>C^1</math></b>	<b>8</b>
II.1	Combinaisons linéaires et produits	8
II.2	Composition des applications de classe $C^1$	8
II.3	Invariance de la différentielle (complément)	9
<b>III</b>	<b>Difféomorphismes et changements de variables</b>	<b>10</b>
III.1	Définition et premières propriétés	10
III.2	Caractérisation des $C^1$ -difféomorphismes	10
III.3	Changements de variables classiques	10
<b>IV</b>	<b>Applications de classe <math>C^k</math></b>	<b>12</b>
IV.1	Définitions	12
IV.2	Propriétés	12
IV.3	Opérations sur les applications de classe $C^k$	13
<b>V</b>	<b>Extremums locaux</b>	<b>14</b>
V.1	Définitions	14
V.2	Points critiques	14
<b>VI</b>	<b>Fonctions implicites</b>	<b>15</b>
VI.1	Fonctions implicites d'une variable	15
VI.2	Fonctions implicites de deux variables	15
<b>VII</b>	<b>Formes différentielles</b>	<b>16</b>
VII.1	Rappels	16
VII.2	Définition d'une forme différentielle	16
VII.3	Formes différentielles exactes, ou fermées	17

---

# I Applications continûment différentiables

## I.1 Applications coordonnées

- Conformément au programme de la classe de PC, les applications considérées ici sont définies sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $1 \leq p \leq 3$ , et  $1 \leq n \leq 3$ .
- Les espaces  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^n$  sont munis d'une norme, notée  $\|\cdot\|$  dans les deux cas. Avec par exemple  $p = 3$ , on pourra choisir de poser pour tout  $M = (x, y, z)$  de  $\Omega$  :

$$\|M\|_1 = |x| + |y| + |z|$$

$$\text{ou } \|M\|_2 = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\text{ou } \|M\|_\infty = \max(|x|, |y|, |z|)$$

- Avec par exemple  $p = 2$  et  $n = 3$ , on notera :

$$\forall M = (x, y) \in \Omega : f(M) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

Les applications  $f_1, f_2, f_3$ , qui sont définies sur  $\Omega$  et à valeurs réelles, sont appelées *applications coordonnées* de  $f$ .

## I.2 Applications partielles

### Définition

Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec par exemple  $p = 3$ .

Soit  $M = (a, b, c)$  un point de  $\Omega$ , et  $u = (\alpha, \beta, \gamma)$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^p$ .

L'application  $\varphi$  qui au réel  $t$  associe  $\varphi(t) = f(M + tu) = f(a + t\alpha, b + t\beta, c + t\gamma)$  est appelée *application partielle* de  $f$ , au point  $M$ , suivant le vecteur  $u$ .

### Remarques

- L'application  $\varphi$  est définie sur un certain ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant 0.
- On note par exemple que  $f(M + u) - f(M) = \varphi(1) - \varphi(0)$ .

### Cas particulier

Chacun des vecteurs  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ , et  $e_3 = (0, 0, 1)$  définit une application partielle au point  $M$ , appelée  $j$ -ème application partielle  $\varphi_j$  en  $M$ , (avec  $1 \leq j \leq p$ ).

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} \varphi_1(t) = f(M + te_1) = f(a + t, b, c) \\ \varphi_2(t) = f(M + te_2) = f(a, b + t, c) \\ \varphi_3(t) = f(M + te_3) = f(a, b, c + t) \end{cases}$$

### I.3 Continuité

#### Définition

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A$  un point de  $\Omega$ .  
On dit que  $f$  est continue en  $A$  si  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$ , c'est-à-dire si :  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ , tel que  $(\|M - A\| \leq \alpha \text{ et } M \in \Omega) \Rightarrow \|f(M) - f(A)\| \leq \varepsilon$

#### Proposition (Continuité et applications partielles)

L'application  $f$  est continue en un point  $A$  de  $\Omega$  si et seulement si chacune de ses applications coordonnées  $f_1, f_2, \dots, f_p$  est continue en  $A$ .

#### Remarque

Cette propriété montre que pour la continuité, on peut toujours se ramener à des applications de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

#### Proposition (Continuité et applications partielles)

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .  
Soit  $A$  un point de  $\Omega$ . On suppose que  $f$  est continue en  $A$ .  
Alors toute application partielle  $t \mapsto \varphi(t) = f(A + tu)$  de  $f$  en  $A$  est continue en 0.

#### Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse !

Voici deux exemples classiques, à connaître :

◇  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , avec  $f(0, 0) = 0$ .

On observe en effet que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$ .

En revanche  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$ . L'application partielle de  $f$  suivant le vecteur  $(1, 1)$  n'est donc pas continue à l'origine, ce qui implique que  $f$  n'est pas continue au point  $(0, 0)$ .

On pouvait également noter que :  $f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$  (quantité qui ne tend pas vers 0 indépendamment de  $\theta$  quand  $\rho$  tend vers 0!).

◇  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ , avec  $f(0, 0) = 0$ .

On observe que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$ .

Plus généralement  $\lim_{t \rightarrow 0} f(ta, tb) = 0$ , ce qui signifie que l'application partielle de  $f$ , suivant un vecteur quelconque  $(a, b)$ , est continue à l'origine.

En revanche  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2}$ .

L'application  $f$  n'est donc pas continue au point  $(0, 0)$ .

## I.4 Dérivée suivant un vecteur

### Définition

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soient  $A$  un point de  $\Omega$ , et  $u$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $t \mapsto \varphi(t) = f(M + tu)$  l'application partielle de  $f$  en  $M$ , suivant  $u$ .

On dit que l'application  $f$  admet pour dérivée le vecteur  $\ell$  de  $\mathbb{R}^n$  au point  $M$  suivant le vecteur  $u$  si l'application  $\varphi$  est dérivable en 0 avec  $\varphi'(0) = \ell$ .

Cela équivaut donc à  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M + tu) - f(M)}{t} = \ell$ . On note  $D_u f(M) = \ell$ .

### Cas particulier : dérivées partielles premières

– Soit  $e_j$  le  $j$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

La dérivée de  $f$  en  $M$  suivant le vecteur  $e_j$ , si elle existe, est appelée  $j$ -ème dérivée partielle de  $f$  en  $M$ , et est notée  $D_j f(M)$ , ou  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(M)$ .

– Autrement dit, et par exemple si  $n = 3$  :

$$\begin{cases} D_1 f(M) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t, b, c) - f(a, b, c)}{t} \\ D_2 f(M) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b+t, c) - f(a, b, c)}{t} \\ D_3 f(M) = \frac{\partial f}{\partial x_3}(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c+t) - f(a, b, c)}{t} \end{cases}$$

– Supposons que l'application  $f$  soit définie comme une fonction des trois variables  $x, y, z$ .

On note alors souvent  $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}(M)$  les trois dérivées partielles de  $f$  en  $M$ .

– Si les dérivées partielles  $D_j f(M)$  existent en tout point de l'ouvert  $\Omega$ , on définit ainsi les applications  $D_j : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  appelées applications dérivées partielles de  $f$ .

Ces applications sont encore notées  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}$  si  $f$  est une fonction des variables  $x, y, z$ .

### Proposition

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

L'application  $f$  possède une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  en un point  $M$  de  $\Omega$  si et seulement si chacune des applications coordonnées  $f_1, \dots, f_n$  de  $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  en  $M$ .

Si par exemple  $n = 3$ , on a alors l'égalité :  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(M), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(M), \frac{\partial f_3}{\partial x_j}(M) \right)$

### Interprétation

La propriété précédente signifie que les coordonnées des dérivées partielles de  $f$  en un point  $M$  sont les dérivées partielles en  $M$  des applications coordonnées de  $f$ .

## I.5 Applications continûment différentiables

### Définition

Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

On dit que  $f$  est continûment différentiable, ou encore de classe  $\mathcal{C}^1$ , sur l'ouvert  $\Omega$  si les applications dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues sur  $\Omega$ .

### Proposition

L'application  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\Omega$  si et seulement si ses applications coordonnées  $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

### Théorème

Soit  $f$  une application définie sur l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^p$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

Alors  $f$  admet une dérivée en tout point  $M$  de  $\Omega$  et suivant tout vecteur  $h$  non nul.

On a alors l'égalité :  $D_h f(M) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(M) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(M)$ .

### Définition

Avec les notations précédentes, l'application  $h \rightarrow D_h f(M)$  est linéaire de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

On l'appelle la différentielle de  $f$  au point  $M$  et on la note  $df_M$ .

### Complément

On connaît la notation classique (ici avec  $p = 3$ ) suivante :

$$df_M = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(M) dx_j = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(M) dx_3.$$

Cette notation rejoint l'écriture précédente si on définit  $dx_1, dx_2, dx_3$  comme la base duale de la base canonique  $e_1, e_2, e_3$  de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire si on pose :

$$dx_1(h_1, h_2, h_3) = h_1, dx_2(h_1, h_2, h_3) = h_2 \text{ et } dx_3(h_1, h_2, h_3) = h_3.$$

### Existence de dérivées partielles et continuité

– Soit  $f$  une application de  $\Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

L'existence de dérivées partielles en un point  $M$  n'implique pas que  $f$  soit continue en  $M$ .

Pour s'en convaincre, on peut reprendre l'exemple de l'application  $f$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0 \text{ à l'origine.}$$

On vérifie en effet que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x} = 0$ . De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y)}{y} = 0$ .

Pourtant, on sait que l'application  $f$  n'est pas continue en  $(0,0)$ .

- En revanche, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ , alors  $f$  est continue sur  $\Omega$ .

## I.6 Matrice Jacobienne

### Définition

Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f_1, \dots, f_n$  ses applications coordonnées.

Soit  $M$  un point de  $\Omega$ . On appelle *matrice jacobienne* de  $f$  en  $M$ , la matrice notée  $J_f(M)$ , appartenant à  $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ , de terme général  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(M)$

### Exemple et remarques

– Si par exemple  $n = p = 3$ , alors  $J_f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(M) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(M) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(M) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(M) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(M) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(M) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

- Pour tout  $i$  de  $\{1, \dots, n\}$ , la  $i$ -ème ligne de  $J_f(M)$  est formée des dérivées partielles successives, au point  $M$ , de l'application coordonnée  $f_i$ .

- La matrice jacobienne de  $f$  en  $M$  est la matrice de l'application linéaire  $df_M$  (c'est-à-dire de la différentielle de  $f$  en  $M$ ) dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^p$  et de  $\mathbb{R}^n$ .

Autrement dit :  $\forall h \in \mathbb{R}^p, [df_M(h)] = J_f(M)[h]$ , où  $[h]$  est la colonne des coordonnées de  $h$ .

- Si  $p = n$ , le déterminant  $\det(J_f(M))$  appelé *jacobien* de  $f$  en  $M$ .

Il est souvent notée  $\frac{D(f_1, \dots, f_p)}{D(x_1, \dots, x_p)}$ .

### Gradient des applications numériques

- On considère ici des applications  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  (donc  $n = 1$ ), de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour tout  $M$  de  $\Omega$  le vecteur de composantes  $D_j(f)(M)$  est appelé *gradient* de  $f$  en  $M$  et est noté  $\text{grad}_M(f)$ .

Par exemple, si  $p = 3$ ,  $\text{grad}_M(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(M) \end{pmatrix}$

- Pour tout  $h$  de  $\mathbb{R}^p$ , on a :  $df_M(h) = J_f(M)[h] = \langle \text{grad}_M(f), h \rangle$  (le résultat est un réel).