Déterminants

Sommaire

I Applications multilinéaires alternées

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I.1 Applications multilinéaires

Définition

> Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$ une famille de $n+1$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
>
> Soit f une application de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dans F.
>
> On dit que f est est *n-linéaire*, ou encore *multilinéaire*, si pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout choix d'un vecteur u_j dans chaque E_j avec $j \neq i$, l'application de E_i dans F définie par $u \rightarrow f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ est linéaire.
>
> On note $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, F)$ l'ensemble de ces applications.
>
> Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on simplifie cette notation en $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Remarques et propriétés

- Il est clair que l'ensemble $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si f est n-linéaire et si l'un des u_i est nul, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.
  Cela résulte en effet de la linéarité par rapport à la i-ième composante
- Si $n = 2$, on parle d'application *bilinéaire*.
  Si $n = 3$, on parle d'application *trilinéaire*.
  Si $F = \mathbb{K}$, on parle de *forme* n-linéaire.
- Une application f de $E \times F$ dans G est bilinéaire $\Leftrightarrow$:
  $\forall (u, u') \in E^2, \forall (v, v') \in F^2, \forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$:
  $$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta u', \gamma v + \delta v') &= \alpha f(u, \gamma v + \delta v') + \beta f(u', \gamma v + \delta v') \\ &= \alpha\gamma f(u, v) + \alpha\delta f(u, v') + \beta\gamma f(u', v) + \beta\delta f(u', v') \end{aligned}$$
- Si $n = 1$, une application de E dans F est "n-linéaire" $\Leftrightarrow$ elle est linéaire.
  Autrement dit $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.
- En revanche, si $n \geq 2$, on ne confondra pas linéarité et n-linéarité.
  Par exemple :
  $$\begin{cases} \text{Si } f \text{ est linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \text{Si } f \text{ est } n\text{-linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$
  De même, si $n = 2$:
  $$\begin{cases} \text{Si } f \text{ linéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v') = f(u, v') + f(u', v) \\ \text{Si } f \text{ est bilinéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v') \end{cases}$$

I.2 Applications multilinéaires alternées

Définition

On dit qu'une application n-linéaire f de E^n dans F est *alternée* si :
$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, avec $i \neq j$:
$f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.
Autrement dit l'échange de deux vecteurs quelconques change l'image par f en son opposée.
On note $\mathcal{A}_n(E,F)$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E^n dans F.

Remarque et exemples

- Il est clair que l'ensemble $\mathcal{A}_n(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si $n = 1$, toute application "n-linéaire" de E dans F (c'est-à-dire en fait linéaire de E dans F) peut être considérée comme "alternée".
- Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
  Le "produit vectoriel" $(u,v) \to u \wedge v$ est bilinéaire alterné de E^2 dans E.
  Le "produit mixte" $(u,v,w) \to (u \wedge v) \cdot w = u \cdot (v \wedge w)$ est une forme trilinéaire.

Proposition

Soit f une application n-linéaire alternée de E^n dans F.
- Si deux des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont égaux, alors $f(u_1, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.
- On ne modifie pas l'image $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs u_j.
- Si les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont liés, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.

Conséquence

Si E est un espace vectoriel de dimension finie strictement inférieure à n, alors la seule application n-linéaire alternée de E^n dans F est l'application nulle.

Proposition et définition

Toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ peut se décomposer en une suite de tranpositions (c'est-à-dire d'échanges de deux éléments).

Une telle décomposition n'est pas unique, mais la parité du nombre de transpositions entrant dans la décomposition d'une permutation donnée est constante.

Si ce nombre est pair (resp. impair) on dira que σ est paire (resp. impaire) et que sa *signature* $\varepsilon(\sigma)$ est égale à 1 (resp. -1).

Proposition

Soit f une application n-linéaire alternée de E^n dans F.
Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$.
Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a :
$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

II Application “déterminant dans une base”

Dans cette section, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$.

On cherche quelles sont les formes n-linéaires alternées sur E.

II.1 Cas de la dimension n=1,2,3

– **En dimension** 1

On suppose donc que E est une droite vectorielle.

Rappelons que toutes les formes 1-linéaires sur E sont considérées comme “alternées”.

La dimension de $\mathcal{A}_\infty(E, K) = \mathcal{L}(E, K) = E^*$ est donc 1. Soit e un vecteur non nul de E.

Une forme linéaire sur E est définie de manière unique par l'image de e.

En particulier une seule d'entre elles vérifie $\varphi(e) = 1$.

Cette application est alors définie par : $\forall x \in \mathbb{K}, \varphi(xe) = x$.

φ est appelée *application déterminant* dans la base (e).

Pour toute forme linéaire f sur E, $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = f(e)$.

– **En dimension** 2

Soit E un plan vectoriel muni d'une base $(e) = e_1, e_2$.

Soit f une forme bilinéaire alternée sur E^2.

Soient $u = x_1e_1 + y_1e_2$ et $u_2 = x_2e_1 + y_2e_2$ deux vecteurs quelconques de E.

$f(u_1, u_2) = f(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2)$

$= x_1x_2 \underbrace{f(e_1, e_1)}_{=0} + x_1y_2f(e_1, e_2) + y_1x_2 \underbrace{f(e_2, e_1)}_{=-f(e_1,e_2)} + y_1y_2 \underbrace{f(e_2, e_2)}_{=0} = (x_1y_2 - y_1x_2)f(e_1, e_2)$.

Réciproquement, on constate que l'application φ définie sur E^2 par :

$$\varphi(u_1, u_2) = \varphi(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - y_1x_2$$

est une forme bilinéaire alternée sur E^2 et vérifie $\varphi(e_1, e_2) = 1$.

φ est appelée *application déterminant* dans la base (e).

Le calcul précédent montre que $\mathcal{A}_2(E, K)$ est une droite vectorielle et que pour toute forme bilinéaire alternée f sur E^2, on a $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = f(e_1, e_2)$.

On voit que φ est la seule forme bilinéaire alternée sur E^2 telle que $\varphi(e_1, e_2) = 1$.

– **En dimension** 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(e) = e_1, e_2, e_3$.

Soit f une forme trilinéaire alternée sur E^3.

Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E, donnés par leurs composantes dans (e) :

$u_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_3e_3, \quad u_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3, \quad u_3 = x_3e_1 + y_3e_2 + z_3e_3.$