II Arcs paramétrés : propriétés métriques

On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$, euclidien orienté, de dimension 2 ou 3.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel associé.

On suppose que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

II.1 Rectification d'un arc paramétré

Définition (Ligne polygonale inscrite dans un arc)

Soit $(I = [a, b], f)$ un arc paramétré continu de $\mathcal{E}$ (avec $a < b$).
Soit $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ une subdivision du segment $[a, b]$.
La suite des points $(M(t_k))_{k=0,\ldots,n}$ est appelée ligne polygonale inscrite dans l'arc (I, f).

La quantité $L_\sigma = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})} \right\|$ est la longueur de cette ligne polygonale.

Définition (Arc rectifiable)

On dit que l'arc paramétré $(I = [a, b], f)$ est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.
On appelle alors longueur de cet arc la quantité : $L = \sup\limits_{\sigma}(L)$, le "Sup" étant pris sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Proposition (Condition suffisante de rectifiabilité)

Si l'arc $(I = [a, b], f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ alors il est rectifiable et sa longueur est $\displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t$.

Invariance par changement de paramétrage

On suppose que $(I = [a, b], f)$ et $(J = [c, d], g)$ (avec $a < b$ et $c < d$) sont deux représentations paramétriques du même arc de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ de I dans J tel que $f = g \circ \varphi$. Alors les longueurs des arcs (I, f) et (J, g) sont égales.

C'est une conséquence de $\displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_a^b \|g' \circ \varphi(t)\|\, |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t = \int_c^d \|g'(u)\|\, \mathrm{d}u$.

Cas particuliers (Tous les arcs considérés ici sont de classe $\mathcal{C}^1$ au moins)

– Arc plan défini par les applications coordonnées $(x(t), y(t))$:

  La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, \mathrm{d}t$.

– Arc plan défini par l'équation $y = y(x)$:

  La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x$.

– Arc plan défini, en polaires, par l'équation $\rho = \rho(\theta)$:
  La longueur de l'arc $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.
– Arc gauche défini en cartésiennes par les applications $x(t), y(t), z(t)$:
  La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$.
– Arc gauche défini en cylindriques par les applications $\rho(\theta), z(\theta)$:
  La longueur de $(I = [a, b], f)$ est $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) + z'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

II.2 Abscisse curviligne

Définition

Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$, et soit t_0 un élément de I.
Pour tout t dans I, la restriction de f à $[t_0, t]$ définit un arc paramétré rectifiable.
Notons $L(t)$ la longueur de cet arc.
On pose alors : $\forall t \le t_0, S(t) = -L(t) \le 0$, et $\forall t \ge t_0, S(t) = L(t) \ge 0$.
Autrement dit : $\forall t \in I, S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.
On dit que l'application S est l'*abscisse curviligne* de l'arc (I, f), orienté dans le sens des t croissants, avec $M(t_0)$ comme origine.
$S(t)$ est appelé abscisse curviligne de $M(t)$. Celle de $M(t_0)$ est nulle.

Remarques

– Avec la même origine $M(t_0)$, on peut très bien orienter l'arc dans le sens des t décroissants, ce qui signifie choisir pour abscisse curviligne $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$.
  En fait l'abscisse curviligne oriente l'arc "dans le sens des abscisses curvilignes croissantes".
– L'arc (I, f) est orienté dans le sens des t croissants, et on prend $M(t_0)$ pour origine.
  Pour tout t de l'intervalle I, on a : $S'(t) = \|f'(t)\| = \left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$.
– Si l'arc (I, f) ne possède que des points réguliers, ou si les points non réguliers sont isolés, alors l'application S est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur I.

Paramétrage de l'arc par l'abscisse curviligne

– Si l'arc (I, f) est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \ge 1$ et s'il est régulier, alors l'application S est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur un intervalle J. L'arc paramétré $(J, g = f \circ S^{-1})$ et l'arc paramétré (I, f) sont alors deux représentations paramétriques du même arc géométrique.
  Pour tout s de J, le point $M = f(t) = f \circ S^{-1}(s)$ est souvent noté $M(s)$.
  L'abscisse curviligne définit donc une nouvelle représentation paramétrique de l'arc initial.
  Quelque soit l'orientation choisie, l'arc est orienté dans le sens des "s croissants".