

## II Arcs paramétrés : propriétés métriques

On se place dans un espace affine  $\mathcal{E}$ , euclidien orienté, de dimension 2 ou 3.

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel associé.

On suppose que  $\mathcal{E}$  est muni d'un repère orthonormé direct.

### II.1 Rectification d'un arc paramétré

**Définition** (Ligne polygonale inscrite dans un arc)

Soit  $(I = [a, b], f)$  un arc paramétré continu de  $\mathcal{E}$  (avec  $a < b$ ).

Soit  $\sigma = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$  une subdivision du segment  $[a, b]$ .

La suite des points  $(M(t_k))_{k=0, \dots, n}$  est appelée ligne polygonale inscrite dans l'arc  $(I, f)$ .

La quantité  $L_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})} \right\|$  est la longueur de cette ligne polygonale.

**Définition** (Arc rectifiable)

On dit que l'arc paramétré  $(I = [a, b], f)$  est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc est majoré.

On appelle alors longueur de cet arc la quantité :  $L = \sup_{\sigma} (L_\sigma)$ , le "Sup" étant pris sur l'ensemble des subdivisions de  $[a, b]$ .

**Proposition** (Condition suffisante de rectifiabilité)

Si l'arc  $(I = [a, b], f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors il est rectifiable et sa longueur est  $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ .

**Invariance par changement de paramétrage**

On suppose que  $(I = [a, b], f)$  et  $(J = [c, d], g)$  (avec  $a < b$  et  $c < d$ ) sont deux représentations paramétriques du même arc de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce qui signifie qu'il existe un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $\varphi$  de  $I$  dans  $J$  tel que  $f = g \circ \varphi$ . Alors les longueurs des arcs  $(I, f)$  et  $(J, g)$  sont égales.

C'est une conséquence de  $\int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|g' \circ \varphi(t)\| |\varphi'(t)| dt = \int_c^d \|g'(u)\| du$ .

**Cas particuliers** (Tous les arcs considérés ici sont de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins)

– Arc plan défini par les applications coordonnées  $(x(t), y(t))$  :

La longueur de l'arc  $(I = [a, b], f)$  est  $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ .

– Arc plan défini par l'équation  $y = y(x)$  :

La longueur de l'arc  $(I = [a, b], f)$  est  $L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ .

- Arc plan défini, en polaires, par l'équation  $\rho = \rho(\theta)$  :  
La longueur de l'arc  $(I = [a, b], f)$  est  $L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$ .
- Arc gauche défini en cartésiennes par les applications  $x(t), y(t), z(t)$  :  
La longueur de  $(I = [a, b], f)$  est  $L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ .
- Arc gauche défini en cylindriques par les applications  $\rho(\theta), z(\theta)$  :  
La longueur de  $(I = [a, b], f)$  est  $L = \int_a^b \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta) + z'^2(\theta)} d\theta$ .

## II.2 Abscisse curviligne

### Définition

Soit  $(I, f)$  un arc paramétré de classe  $\mathcal{C}^1$ , et soit  $t_0$  un élément de  $I$ .  
 Pour tout  $t$  dans  $I$ , la restriction de  $f$  à  $[t_0, t]$  définit un arc paramétré rectifiable.  
 Notons  $L(t)$  la longueur de cet arc.  
 On pose alors :  $\forall t \leq t_0, S(t) = -L(t) \leq 0$ , et  $\forall t \geq t_0, S(t) = L(t) \geq 0$ .  
 Autrement dit :  $\forall t \in I, S(t) = \int_{t_0}^t \|f'(t)\| dt$ .  
 On dit que l'application  $S$  est l'*abscisse curviligne* de l'arc  $(I, f)$ , orienté dans le sens des  $t$  croissants, avec  $M(t_0)$  comme origine.  
 $S(t)$  est appelé abscisse curviligne de  $M(t)$ . Celle de  $M(t_0)$  est nulle.

### Remarques

- Avec la même origine  $M(t_0)$ , on peut très bien orienter l'arc dans le sens des  $t$  décroissants, ce qui signifie choisir pour abscisse curviligne  $S(t) = \int_t^{t_0} \|f'(t)\| dt$ .  
 En fait l'abscisse curviligne oriente l'arc "dans le sens des abscisses curvilignes croissantes".
- L'arc  $(I, f)$  est orienté dans le sens des  $t$  croissants, et on prend  $M(t_0)$  pour origine.  
 Pour tout  $t$  de l'intervalle  $I$ , on a :  $S'(t) = \|f'(t)\| = \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\|$ .
- Si l'arc  $(I, f)$  ne possède que des points réguliers, ou si les points non réguliers sont isolés, alors l'application  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante sur  $I$ .

### Paramétrage de l'arc par l'abscisse curviligne

- Si l'arc  $(I, f)$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  avec  $k \geq 1$  et s'il est régulier, alors l'application  $S$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $I$  sur un intervalle  $J$ . L'arc paramétré  $(J, g = f \circ S^{-1})$  et l'arc paramétré  $(I, f)$  sont alors deux représentations paramétriques du même arc géométrique.  
 Pour tout  $s$  de  $J$ , le point  $M = f(t) = f \circ S^{-1}(s)$  est souvent noté  $M(s)$ .  
 L'abscisse curviligne définit donc une nouvelle représentation paramétrique de l'arc initial.  
 Quelque soit l'orientation choisie, l'arc est orienté dans le sens des "s croissants".