Courbes et surfaces

Sommaire

I Nappes paramétrées. propriétés affines

$\mathcal{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3.

Il est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

On identifiera un point M de $\mathcal{E}$ avec le triplet (x, y, z) de ses coordonnées dans ce repère.

Définition (Nappes paramétrées)

On appelle *nappe paramétrée* tout couple (U, f), où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^3$ et où f est une application de U dans $\mathcal{E}$, de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarques et définitions

- Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \geq 1$, on parle de nappe de classe $\mathcal{C}^k$.
  Pour tout couple (u, v) de U, $f(u, v)$ est appelé point de paramètres u, v de la nappe paramétrée (U, f). On le note $M(u, v)$.
- L'ensemble $f(U) \subset \mathcal{E}$ est appelé le *support* de la nappe paramétrée.
- Se donner la nappe paramétrée (U, f) c'est se donner trois applications numériques $x(u, v)$, $y(u, v)$ et $z(u, v)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (coordonnées de $M(u, v)$).
- Un point M du support $f(U)$ de la nappe est dit *simple* s'il existe un unique couple (u, v) de U tel que $M = M(u, v)$.
  Sinon M est dit multiple (double, triple, etc, ...).

Définition (Point régulier d'une nappe paramétrée)

Un point $M(u_0, v_0)$ du support de la nappe (U, f) est dit *régulier* si les vecteurs $\dfrac{\partial F}{\partial u}(M)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}(M)$ sont libres. Sinon il est dit *stationnaire*.
On dit que la nappe (U, f) est régulière si tous ses points sont réguliers.

Cas particulier

- La nappe est dite *cartésienne* si le paramétrage s'écrit $(x, y) \mapsto M(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$.
  On parle alors de la nappe d'équation $z = \varphi(x, y)$. Cette nappe est simple et régulière.
  En effet $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M) = (1, 0, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y))$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(M) = (0, 1, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} x, y))$ sont libres.

Définition (Notions de surface)

Soit F une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert V de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathcal{S} = \{M(x, y, z), F(x, y, z) = 0\}$ s'appelle la *surface* d'équation $F(x, y, z) = 0$.

Définition (Point régulier d'une surface)

Un point $M(x_0, y_0, z_0)$ de la surface $F(x, y, z) = 0$ est dit *régulier* si $\text{grad}F(M) \neq 0$, c'est-à-dire si : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, ou $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, ou $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Définition (paramétrage local d'une surface)

On dit que la surface $\mathcal{S}$ admet un *paramétrage local* en M_0 s'il existe un ouvert U_0 contenant M_0, contenu dans V, et une nappe paramétrée (U, f) de support $\mathcal{S} \cap U_0$.

Remarque

- Si le point M_0 est régulier alors la surface $\mathcal{S}$ admet en M_0 un paramétrage local.

  Par exemple si $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un paramétrage local du type $z = \varphi(x, y)$.

Définition (Plan tangent en un point régulier d'une nappe)

Le *plan tangent* en un point régulier $M(u_0, v_0)$ d'une nappe paramétrée (U, f) est le plan passant par $M(u_0, v_0)$ et dirigé par $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Son équation est donc $\det\Big(\overrightarrow{M_0M}, \dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)\Big) = 0$.

Définition (Plan tangent en un point régulier d'une surface)

Le *plan tangent* en un point régulier M_0 de la surface déquation $F(M) = 0$ est le plan affine de $\mathcal{E}$ passant par le point M_0 et orthogonal au vecteur $\text{grad}F(M_0)$.

Son équation est donc : $\dfrac{\partial F}{\partial x}(M_0)(X - x_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(M_0)(Y - y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0)(Z - z_0) = 0$.

Remarques

- Pour une surface ayant un paramétrage local en M_0, les deux notions de plan tangent en M_0 coïncident.
- On appelle *tangente* en un point M_0 d'une surface (d'une nappe paramétrée) toute droite passant par M_0 et contenue dans le plan tangent.

  On appelle *normale* en M_0 la droite passant par M_0 et orthogonale au plan tangent.
- La normale en un point M_0 régulier de la surface d'équation $F(M) = 0$ est dirigée par le vecteur $\text{grad}F(M)$.

  En un point régulier de la nappe (U, f), elle est dirigée par le vecteur $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Intersection de deux surfaces

- Soient deux surfaces, $\mathcal{S}_1$ d'équation $F_1(M) = 0$, et $\mathcal{S}_2$ d'équation $F_2(M) = 0$.

  On suppose que leur intersection Γ contient un point M_0 régulier pour ces deux surfaces.

  Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux plans tangents en M_0.
- Si $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$, on dit que les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont tangentes en M_0.
- Si $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, la droite $D = \mathcal{P}_\infty \cap \mathcal{P}_\in$ est la tangente en M_0 à un arc paramétré de support inclus dans Γ. Un vecteur directeur de cette tangente est $\text{grad}F_1(M_0) \wedge \text{grad}F_2(M_0)$.