Fonction Zéta de Riemann

Pour x réel, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction *Zeta* de Riemann.

Partie I

Dans cette partie, on étudie sommairement les variations de la fonction ζ.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction ζ ? [S]
2. Montrer que la fonction ζ est strictement décroissante. [S]
3. En déduire que $\lim_{x \to 1+} \zeta(x) = +\infty$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$ on a : $1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [S]
   (b) En déduire que $\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1$. [S]
5. Montrer que la fonction ζ est convexe. [S]
6. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

   Retrouver ainsi le résultat des questions 2 et 5. [S]
7. Représenter sommairement la courbe représentative de la fonction ζ. [S]

Partie II

Dans cette partie, on étudie plus précisément le comportement de la fonction ζ en 1 et en $+\infty$, et on établit sa dérivabilité à tout ordre.

1. Pour $n \geq 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-x}\,\mathrm{d}t$. [S]
2. En déduire que pour $x > 1$ et $N \geq 2$ on a : $\frac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$. [S]
3. Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, alors $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$. [S]
4. Déduire de la question II-2 que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1. [S]

Partie III

Dans cette partie, on améliore le résultat de la question II-4

On définit une série de fonctions $\sum f_n$ par : $f_n(x) = n^{-x} - \int_n^{n+1} t^{-x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite de terne général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ est convergente.

   Sa limite est notée γ et on l'appelle la *constante d'Euler* ($\gamma \approx 0.5772156649$). [S]

2. Prouver que pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a : $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$. [S]
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est convergente sur $]0, +\infty[$. [S]
4. Soit S la somme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que $S(1) = \gamma$ et donner l'expression de $S(x)$ quand $x > 1$. [S]
5. Prouver que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur $[1, +\infty[$. [S]
6. En déduire que lorsque x tend vers 1 alors $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers γ. [S]