# Fonction Zéta de Riemann

Pour $x$ réel, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. On définit ainsi la fonction *Zeta* de Riemann.

## Partie I

Dans cette partie, on étudie sommairement les variations de la fonction $\zeta$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction $\zeta$ ? [S]
2. Montrer que la fonction $\zeta$ est strictement décroissante. [S]
3. En déduire que $\lim_{x\to 1+} \zeta(x) = +\infty$. [S]
4. (a) Montrer que pour tout $x \geq 2$ et tout $N \geq 1$ on a : $1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. [S]
   (b) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. [S]
5. Montrer que la fonction $\zeta$ est convexe. [S]
6. Montrer que $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x > 1, \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

   Retrouver ainsi le résultat des questions 2 et 5. [S]
7. Représenter sommairement la courbe représentative de la fonction $\zeta$. [S]

## Partie II

Dans cette partie, on étudie plus précisément le comportement de la fonction $\zeta$ en 1 et en $+\infty$, et on établit sa dérivabilité à tout ordre.

1. Pour $n \geq 2$ et $x > 0$, montrer les inégalités $\int_n^{n+1} t^{-x}\,dt \leq n^{-x} \leq \int_{n-1}^{n} t^{-x}\,dt$. [S]
2. En déduire que pour $x > 1$ et $N \geq 2$ on a : $\frac{N^{1-x}}{x-1} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{(N-1)^{1-x}}{x-1}$. [S]
3. Montrer que lorsque $x$ tend vers $+\infty$, alors $\zeta(x) - 1 \sim 2^{-x}$. [S]
4. Déduire de la question II-2 que $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ quand $x$ tend vers 1. [S]

## Partie III

Dans cette partie, on améliore le résultat de la question II-4

On définit une série de fonctions $\sum f_n$ par : $f_n(x) = n^{-x} - \int_n^{n+1} t^{-x}\,dt$.

1. Montrer que la suite de terne général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ est convergente.

   Sa limite est notée $\gamma$ et on l'appelle la *constante d'Euler* ($\gamma \approx 0.5772156649$). [S]


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

2. Prouver que pour $n \geq 1$ et $x > 0$ on a : $0 \leq f_n(x) \leq n^{-x} - (n+1)^{-x}$. [S]
3. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ est convergente sur $]0, +\infty[$. [S]
4. Soit $S$ la somme de la série $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   Montrer que $S(1) = \gamma$ et donner l'expression de $S(x)$ quand $x > 1$. [S]
5. Prouver que la convergence de la série $\sum f_n$ est uniforme sur $[1, +\infty[$. [S]
6. En déduire que lorsque $x$ tend vers 1 alors $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $\gamma$. [S]


©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.