Développement en série de $1/\sin^2(t)$

On considère des applications à valeurs réelles et définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{D}$ vérifie la condition (1) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \dfrac{x+k}{n} \in \mathcal{D}$.

On dit ensuite que f vérifie la condition (2) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{x+k}{n})$.

1. Vérifier rapidement que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ satisfont à la condition (1). [S]
2. Soit f une application continue et vérifiant la condition (2) sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est l'application nulle. [S]
3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $\sin(\pi z) = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin(\pi \frac{z+k}{n})$.
   Indication : formule d'Euler et factorisation de $X^n - 1$ dans , $\mathbb{C}$. [S]
   (b) En déduire que l'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}$ vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, cette suite étant indicée par l'ensemble des entiers relatifs.
   On dit que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ est simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergente sur I si les deux séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ sont simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergentes sur I.
   En cas de convergence on note, pour tout x de I : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$.
   Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ est la limite de $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} f_n(x)$ quand $\begin{cases} p \to -\infty \\ q \to +\infty \end{cases}$
   (a) Montrer qu'on définit une application S sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ en posant $S(s) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ [S]
   (b) Prouver que l'application S est périodique de période 1. [S]
   (c) Démontrer que S est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
   Indication : montrer que la série définissant S est normalement convergente sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$. [S]
   (d) Prouver que l'application S vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
5. (a) Montrer que l'application $x \mapsto \psi(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \dfrac{1}{x^2}$ a une limite finie en $x = 0$. [S]
   (b) Montrer que $g : x \to \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - S(x)$ est continuement prolongeable sur $\mathbb{R}$. [S]
   (c) On note $\widehat{g}$ le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{g}$ est l'application nulle. [S]

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

6. (a) En déduire que pour tout t de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\dfrac{1}{\sin^2 t} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+n\pi)^2}$. [S]

   (b) Montrer que l'application $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$. [S]

   (c) Prouver que $H(x) = \operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x}$ pour $0 < |x| < \pi$. [S]

   (d) Par intégration terme à terme, montrer que :

   $$0 < |x| < \pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln \frac{\sin x}{x}.$$ [S]

   (e) En déduire finalement que si $0 < |x| < \pi$ alors : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$. [S]

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.