

Développement en série de $1/\sin^2(t)$

On considère des applications à valeurs réelles et définies sur une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} .

On dit que \mathcal{D} vérifie la condition (1) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{x+k}{n} \in \mathcal{D}$.

On dit ensuite que f vérifie la condition (2) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$.

1. Vérifier rapidement que \mathbb{R} et $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ satisfont à la condition (1). [S]

2. Soit f une application continue et vérifiant la condition (2) sur \mathbb{R} .

Montrer que f est l'application nulle. [S]

3. (a) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* et pour tout z de \mathbb{C} : $\sin(\pi z) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \frac{z+k}{n}\right)$.

Indication : formule d'Euler et factorisation de $X^n - 1$ dans \mathbb{C} . [S]

(b) En déduire que l'application $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x)}$ vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]

4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs réelles, cette suite étant indicée par l'ensemble des entiers relatifs.

On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ est simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergente sur I si les deux séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ sont simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergentes sur I .

En cas de convergence on note, pour tout x de I : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$.

Autrement dit, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ est la limite de $\sum_{n=p}^q f_n(x)$ quand $\begin{cases} p \rightarrow -\infty \\ q \rightarrow +\infty \end{cases}$

(a) Montrer qu'on définit une application S sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ en posant $S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ [S]

(b) Prouver que l'application S est périodique de période 1. [S]

(c) Démontrer que S est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Indication : montrer que la série définissant S est normalement convergente sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$. [S]

(d) Prouver que l'application S vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]

5. (a) Montrer que l'application $x \mapsto \psi(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \frac{1}{x^2}$ a une limite finie en $x = 0$. [S]

(b) Montrer que $g : x \mapsto \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - S(x)$ est continuellement prolongeable sur \mathbb{R} . [S]

(c) On note \hat{g} le prolongement continu de g à \mathbb{R} . Montrer que \hat{g} est l'application nulle. [S]



6. (a) En déduire que pour tout t de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t + n\pi)^2}$. [S]
- (b) Montrer que l'application $H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\pi, \pi[$. [S]
- (c) Prouver que $H(x) = \cotan x - \frac{1}{x}$ pour $0 < |x| < \pi$. [S]
- (d) Par intégration terme à terme, montrer que :
- $$0 < |x| < \pi \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \ln \frac{\sin x}{x}. \quad [\text{S}]$$
- (e) En déduire finalement que si $0 < |x| < \pi$ alors : $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$. [S]