Développement en série de $1/\sin^2(t)$

On considère des applications à valeurs réelles et définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On dit que $\mathcal{D}$ vérifie la condition (1) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \dfrac{x+k}{n} \in \mathcal{D}$.

On dit ensuite que f vérifie la condition (2) si : $\forall x \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n^2 f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right)$.

1. Vérifier rapidement que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ satisfont à la condition (1). [S]
2. Soit f une application continue et vérifiant la condition (2) sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que f est l'application nulle. [S]
3. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $\sin(\pi z) = 2^{n-1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\pi \frac{z+k}{n}\right)$.
   Indication : formule d'Euler et factorisation de $X^n - 1$ dans , $\mathbb{C}$. [S]
   (b) En déduire que l'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(\pi x)}$ vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
4. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, cette suite étant indicée par l'ensemble des entiers relatifs.
   On dit que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ est simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergente sur I si les deux séries de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ sont simplement (resp. uniformément, resp. normalement) convergentes sur I.
   En cas de convergence on note, pour tout x de I : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$.
   Autrement dit, $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(x)$ est la limite de $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} f_n(x)$ quand $\begin{cases} p \to -\infty \\ q \to +\infty \end{cases}$
   (a) Montrer qu'on définit une application S sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ en posant $S(s) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ [S]
   (b) Prouver que l'application S est périodique de période 1. [S]
   (c) Démontrer que S est continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
   Indication : montrer que la série définissant S est normalement convergente sur tout segment $[a, b]$ de $]0, 1[$. [S]
   (d) Prouver que l'application S vérifie la condition (2) sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. [S]
5. (a) Montrer que l'application $x \mapsto \psi(x) = \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - \dfrac{1}{x^2}$ a une limite finie en $x = 0$. [S]
   (b) Montrer que $g : x \to \dfrac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} - S(x)$ est continuement prolongeable sur $\mathbb{R}$. [S]
   (c) On note $\widehat{g}$ le prolongement continu de g à $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{g}$ est l'application nulle. [S]

6. (a) En déduire que pour tout t de $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$: $\dfrac{1}{\sin^2 t} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{(t+n\pi)^2}$. [S]

   (b) Montrer que l'application $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$. [S]

   (c) Prouver que $H(x) = \operatorname{cotan} x - \dfrac{1}{x}$ pour $0 < |x| < \pi$. [S]

   (d) Par intégration terme à terme, montrer que :

   $0 < |x| < \pi \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$. [S]

   (e) En déduire finalement que si $0 < |x| < \pi$ alors : $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\Big) = \dfrac{\sin x}{x}$. [S]