

Convergence et valeur d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n \geq q}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Pour tout $m \geq q$, on pose $P_m = \prod_{n=q}^m u_n = u_q u_{q+1} \cdots u_m$.

On dit que les $(P_m)_{m \geq q}$ sont les produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$.

Si $(P_m)_{m \geq q}$ converge vers une limite non nulle, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ converge.

Cette limite est alors notée $\prod_{n=q}^{\infty} u_n$. On l'appelle la *valeur* du produit infini.

Si $(P_m)_{m \geq q}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ est divergent.

Par abus de langage, on pourra cependant noter $\prod_{n=q}^{\infty} u_n = 0$ si $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = 0$.

Partie 1

Dans cette partie, on établit une condition nécessaire de convergence et on calcule quelques produits infinis.

1. Montrer que si $\prod_{n \geq q} u_n$ converge, alors les u_n sont tous non nuls et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. [S]

2. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ est divergent, et que $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$.

Remarque : cet exemple prouve que la réciproque du résultat vu en 1.1 est fausse. [S]

3. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et de valeur $\frac{1}{2}$. [S]

4. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ est convergent et de valeur $\frac{1}{3}$. [S]

5. Montrer que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ est convergent et de valeur 1. [S]

Partie 2

Dans cette partie, on étudie les produits infinis de réels strictement positifs.

On note $(u_n)_{n \geq q}$ une suite de \mathbb{R}^{+*} .

1. Prouver que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ converge \Leftrightarrow la série $\sum_{n \geq q} \ln u_n$ converge.

Préciser alors la relation entre les valeurs $\prod_{n=q}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=q}^{\infty} \ln u_n$. [S]

2. Dans cette question, on suppose que les u_n sont tous dans $]0, 1]$ ou tous dans $[1, +\infty[$.
 Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ converge \Leftrightarrow la série $\sum_{n \geq q} (u_n - 1)$ converge.
 Indication : on commencera par supposer que la suite $(u_n)_{n \geq q}$ ne converge pas vers 1. [S]
3. Dans cette question uniquement, on pose $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$.
 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - 1)$ diverge mais que le produit infini $\prod_{n \geq 1} u_n$ converge.
 Remarque : cet exemple montre l'importance des hypothèses de la question 2.2. [S]
4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n \geq q} (u_n - 1)$ est convergente.
 Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ a même nature que la série $\sum_{n \geq q} (u_n - 1)^2$.
 Indication : on pourra noter que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$ et développer $\ln(1 + v_n)$ avec $v_n = u_n - 1$. [S]
5. Dédurre de ce qui précède un exemple où $\sum_{n \geq q} (u_n - 1)$ converge mais où $\prod_{n \geq q} u_n$ diverge. [S]

Partie 3

On désigne par $(u_n)_{n \geq q}$ une suite de \mathbb{C} , et on suppose que tous les u_n sont non nuls.

On suppose que la série $\sum_{n \geq q} |u_n - 1|$ est convergente et donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer que le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ est convergent.

On pose $v_n = u_n - 1$, $P_n = \prod_{k=q}^n u_k$, et $Q_n = \prod_{k=q}^n (1 + |v_k|)$.

1. Pour tous nombres complexes z_1, z_2, \dots, z_n , montrer que $\left| \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1 \right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$.
 Indication : Raisonnement par récurrence sur n . [S]
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n \geq q} (1 + |v_n|)$ est convergent. [S]
3. Montrer que pour tous entiers n et m tels que $n > m \geq q$, on a : $|P_n - P_m| \leq Q_n - Q_m$. [S]
4. Dédurre de la question précédente que la suite $(P_n)_{n \geq q}$ est convergente. [S]
5. Il reste à montrer que la limite de la suite $(P_n)_{n \geq q}$ est non nulle.
- (a) Montrer que pour complexe z tel que $|z| < 1$, on a $|\ln |1 + z|| \leq -\ln(1 - |z|)$. [S]
- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq q} \ln |u_n|$ est absolument convergente. [S]
- (c) En déduire que la limite de la suite $(P_n)_{n \geq q}$ ne peut pas être nulle. [S]
6. Conclure... [S]

Partie 4

Cette partie est consacrée à l'expression de $\frac{\sin t}{t}$ sous la forme d'un produit infini.

Cette expression est due à Euler. La première question est indépendante des suivantes.

1. Calcul du produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$

(a) Justifier la convergence de ce produit infini sans chercher à calculer sa valeur. [S]

(b) Exprimer le produit partiel $P_m = \prod_{n=1}^m \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$ à l'aide de factorielles. [S]

(c) Utiliser la formule de Stirling et en déduire que $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$. [S]

2. On établit ici une première factorisation de $\sin(2p+1)\theta$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Prouver $\sin(2p+1)\theta = A_p(\sin \theta)$, où $A_p(X) = (-1)^p \sum_{k=0}^p C_{2p+1}^{2k+1} X^{2k+1} (X^2 - 1)^{p-k}$ [S]

(b) Montrer que A_p est un polynôme de degré $2p+1$, de coefficient dominant $(-4)^p$. [S]

(c) Montrer que les racines de A_p sont les $x_k = \sin \theta_k$, où $\theta_k = \frac{k\pi}{2p+1}$ et $-p \leq k \leq p$. [S]

(d) En déduire que $\sin(2p+1)\theta = 4^p \sin \theta \prod_{k=1}^p (\sin^2 \theta_k - \sin^2 \theta)$. [S]

(e) En utilisant $\theta \rightarrow 0$ montrer que : $\sin(2p+1)\theta = (2p+1) \sin \theta \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta_k}\right)$ [S]

3. On établit maintenant une deuxième factorisation de $\sin(2p+1)\theta$.

Soit p un entier naturel, et θ un réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer $\sin(2p+1)\theta = \sin \theta \cos(\theta)^{2p} B_p(\tan \theta)$ où B est un polynôme de degré $2p$.
Indication : ré-utiliser les calculs fait en 4.2.a [S]

(b) Montrer que les racines de B_p sont les $t_k = \tan \theta_k$ où $\theta_k = \frac{k\pi}{2p+1}$ et $0 < |k| \leq p$. [S]

(c) En déduire la factorisation : $B_p(\tan \theta) = \prod_{k=1}^p (\tan^2 \theta_k - \tan^2 \theta)$. [S]

(d) En faisant tendre θ vers 0, prouver que : $B_p(\tan \theta) = (2p+1) \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_k}\right)$. [S]

(e) En déduire la factorisation : $\sin(2p+1)\theta = (2p+1) \sin \theta \cos(\theta)^{2p} \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_k}\right)$. [S]



4. Développement de $\sin t$ en produit infini.

(a) Montrer que si $0 \leq x \leq y < \frac{\pi}{2}$, alors $\frac{\tan x}{\tan y} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{\sin x}{\sin y}$. [S]

(b) On rappelle la notation $\theta_k = \frac{k\pi}{2p+1}$, avec $k \in \{1, \dots, p\}$.

Montrer que si $0 \leq \theta < \theta_1$: $\sin(2p+1)\theta \leq (2p+1) \sin \theta \prod_{k=1}^p \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_k^2}\right) \leq \frac{\sin(2p+1)\theta}{\cos^{2p} \theta}$. [S]

(c) On pose maintenant $\theta = \frac{t}{2p+1}$ avec $0 \leq t < \pi$, et on fait tendre p vers $+\infty$.

En déduire le résultat suivant, dû à Euler : $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2\pi^2}\right)$ [S]

5. Retrouver le résultat de la question 4.1. [S]

Corrigé du problème

Partie 1

1. Pour tout $m \geq q$, soit $P_m = \prod_{n=q}^m u_n$. Si l'un au moins des u_n était nul, alors la suite

$(P_m)_{m \geq q}$ serait stationnaire en 0. Le produit infini $\prod_{n \geq q} u_n$ serait donc divergent.

Inversement supposons que ce produit infini converge, et soit P sa valeur non nulle.

Par définition $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m = P$. Or $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n > q$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{P}{P} = 1$. [Q]

2. On a : $P_m = \prod_{n=2}^m \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^m \frac{n-1}{n} = \prod_{n=2}^m (n-1) \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} = \prod_{n=1}^{m-1} n \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m}$

Donc, quand $m \rightarrow \infty$: $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$. Ce produit infini est donc divergent. [Q]

3. Comme précédemment, pour tout entier $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_m &= \prod_{n=2}^m \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^m \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \prod_{n=2}^m (n-1) \cdot \prod_{n=2}^m (n+1) \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n^2} \\ &= \prod_{n=1}^{m-1} n \cdot \prod_{n=3}^{m+1} n \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n^2} = 2 \cdot m(m+1) \cdot \frac{1}{4m^2} = \frac{m+1}{2m} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est donc convergent, et sa valeur est $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$. [Q]

4. Pour tout entier $m \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_m &= \prod_{n=2}^m \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \prod_{n=2}^m \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \prod_{n=2}^m (n-1) \cdot \prod_{n=2}^m (n+2) \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n+1} = \prod_{n=1}^{m-1} n \cdot \prod_{n=4}^{m+2} n \cdot \prod_{n=2}^m \frac{1}{n} \cdot \prod_{n=3}^{m+1} \frac{1}{n} \\ &= 6 \cdot m(m+1)(m+2) \cdot \frac{1}{6m} \cdot \frac{1}{3m(m+1)} = \frac{m+2}{3m} \rightarrow \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le produit infini $\prod_{n \geq 2} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ est donc convergent, et $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$. [Q]

5. Posons $u_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On a : $u_{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1} = \frac{2n}{2n-1}$ et $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n}$.

Ainsi $u_{2n-1}u_{2n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit, pour tout $m \geq 1$:

$$P_{2m} = \prod_{n=1}^{2m} u_n = \prod_{n=1}^m (u_{2n-1}u_{2n}) = 1 \text{ et } P_{2m+1} = P_{2m} u_{2m+1} = 1 + \frac{1}{2m+1}.$$

La suite $(P_m)_{m \geq 1}$ converge donc vers 1. Autrement dit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 1$. [Q]