Convergence et valeur d'un produit infini

Soit $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Pour tout $m \geq q$, on pose $P_m = \displaystyle\prod_{n=q}^{m} u_n = u_q u_{q+1} \cdots u_m$.

On dit que les $(P_m)_{m\geq q}$ sont les produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ converge vers une limite non nulle, on dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge.

Cette limite est alors notée $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n$. On l'appelle la *valeur* du produit infini.

Si $(P_m)_{m\geq q}$ est divergente ou de limite nulle, on dit que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ est divergent.

Par abus de langage, on pourra cependant noter $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n = 0$ si $\displaystyle\lim_{m\to\infty} P_m = 0$.

Partie 1

Dans cette partie, on établit une condition nécessaire de convergence et on calcule quelques produits infinis.

1. Montrer que si $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge, alors les u_n sont tous non nuls et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 1$. [S]
2. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergent, et que $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$.

   Remarque : cet exemple prouve que la réciproque du résultat vu en 1.1 est fausse. [S]
3. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergent et de valeur $\dfrac{1}{2}$. [S]
4. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ est convergent et de valeur $\dfrac{1}{3}$. [S]
5. Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ est convergent et de valeur 1. [S]

Partie 2

Dans cette partie, on étudie les produits infinis de réels strictement positifs.

On note $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Prouver que le produit infini $\displaystyle\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq q} \ln u_n$ converge.

   Préciser alors la relation entre les valeurs $\displaystyle\prod_{n=q}^{\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=q}^{\infty} \ln u_n$. [S]

2. Dans cette question, on suppose que les u_n sont tous dans $]0,1]$ ou tous dans $[1,+\infty[$.
Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge.
Indication : on commencera par supposer que la suite $(u_n)_{n\geq q}$ ne converge pas vers 1. [S]
3. Dans cette question uniquement, on pose $u_n = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{2n}$ pour $n\geq 1$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}(u_n-1)$ diverge mais que le produit infini $\prod_{n\geq 1} u_n$ converge.
Remarque : cet exemple montre l'importance des hypothèses de la question 2.2. [S]
4. Dans cette question, on suppose que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ est convergente.
Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}^{\infty} u_n$ a même nature que la série $\sum_{n\geq q}(u_n-1)^2$.
Indication : on pourra noter que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ et développer $\ln(1+v_n)$ avec $v_n = u_n-1$. [S]
5. Déduire de ce qui précède un exemple où $\sum_{n\geq q}(u_n-1)$ converge mais où $\prod_{n\geq q} u_n$ diverge. [S]

Partie 3

On désigne par $(u_n)_{n\geq q}$ une suite de $\mathbb{C}$, et on suppose que tous les u_n sont non nuls.

On suppose que la série $\sum_{n\geq q}|u_n-1|$ est convergente et donc que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ est convergent.

On pose $v_n = u_n - 1$, $P_n = \prod_{k=q}^{n} u_k$, et $Q_n = \prod_{k=q}^{n}(1+|v_k|)$.

1. Pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$, montrer que $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)-1$.
Indication : Raisonnement par récurrence sur n. [S]
2. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq q}(1+|v_n|)$ est convergent. [S]
3. Montrer que pour tous entiers n et m tels que $n > m \geq q$, on a : $|P_n - P_m| \leq Q_n - Q_m$. [S]
4. Déduire de la question précédente que la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est convergente. [S]
5. Il reste à montrer que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ est non nulle.
   (a) Montrer que pour complexe z tel que $|z| < 1$, on a $\Big|\ln|1+z|\Big| \leq -\ln(1-|z|)$. [S]
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq q}\ln|u_n|$ est absolument convergente. [S]
   (c) En déduire que la limite de la suite $(P_n)_{n\geq q}$ ne peut pas être nulle. [S]
6. Conclure... [S]

Partie 4

Cette partie est consacrée à l'expression de $\dfrac{\sin t}{t}$ sous la forme d'un produit infini.
Cette expression est dûe à Euler. La première question est indépendante des suivantes.

1. Calcul du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{1}{4n^2}\Bigr)$
   (a) Justifier la convergence de ce produit infini sans chercher à calculer sa valeur. [S]
   (b) Exprimer le produit partiel $P_m = \displaystyle\prod_{n=1}^{m}\Bigl(1-\frac{1}{4n^2}\Bigr)$ à l'aide de factorielles. [S]
   (c) Utiliser la formule de Stirling et en déduire que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{1}{4n^2}\Bigr)=\frac{2}{\pi}$. [S]
2. On établit ici une première factorisation de $\sin(2p+1)\theta$. Soit $p \in \mathbb{N}$, et $\theta \in \mathbb{R}$.
   (a) Prouver $\sin(2p+1)\theta = A_p(\sin\theta)$, où $A_p(\mathrm{X}) = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_{2p+1}^{2k+1}\, \mathrm{X}^{2k+1}\, (\mathrm{X}^2-1)^{p-k}$ [S]
   (b) Montrer que A_p est un polynôme de degré $2p+1$, de coefficient dominant $(-4)^p$. [S]
   (c) Montrer que les racines de A_p sont les $x_k = \sin\theta_k$, où $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $-p \leq k \leq p$. [S]
   (d) En déduire que $\sin(2p+1)\theta = 4^p \sin\theta \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\sin^2\theta_k - \sin^2\theta)$. [S]
   (e) En utilisant $\theta \to 0$ montrer que : $\sin(2p+1)\theta = (2p+1)\sin\theta \displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta_k}\Bigr)$ [S]
3. On établit maintenant une deuxième factorisation de $\sin(2p+1)\theta$.
   Soit p un entier naturel, et θ un réel compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.
   (a) Montrer $\sin(2p+1)\theta = \sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\, B_p(\tan\theta)$ où B est un polynôme de degré $2p$.
   Indication : ré-utiliser les calculs fait en 4.2.a [S]
   (b) Montrer que les racines de B_p sont les $t_k = \tan\theta_k$ où $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$ et $0 < |k| \leq p$. [S]
   (c) En déduire la factorisation : $B_p(\tan\theta) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(\tan^2\theta_k - \tan^2\theta)$. [S]
   (d) En faisant tendre θ vers 0, prouver que : $B_p(\tan\theta) = (2p+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr)$. [S]
   (e) En déduire la factorisation : $\sin(2p+1)\theta = (2p+1)\sin\theta\,\cos(\theta)^{2p}\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Bigl(1-\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta_k}\Bigr)$. [S]

4. Développement de $\sin t$ en produit infini.

   (a) Montrer que si $0 \le x \le y < \dfrac{\pi}{2}$, alors $\dfrac{\tan x}{\tan y} \le \dfrac{x}{y} \le \dfrac{\sin x}{\sin y}$. [S]

   (b) On rappelle la notation $\theta_k = \dfrac{k\pi}{2p+1}$, avec $k \in \{1, \cdots, p\}$.

   Montrer que si $0 \le \theta < \theta_1$: $\sin(2p+1)\theta \le (2p+1)\sin\theta \displaystyle\prod_{k=1}^{p}\Big(1-\frac{\theta^2}{\theta_k^2}\Big) \le \frac{\sin(2p+1)\theta}{\cos^{2p}\theta}$. [S]

   (c) On pose maintenant $\theta = \dfrac{t}{2p+1}$ avec $0 \le t < \pi$, et on fait tendre p vers $+\infty$.

   En déduire le résultat suivant, dû à Euler : $\forall t \in]-\pi, \pi[,\quad \dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{t^2}{k^2\pi^2}\Big)$ [S]

5. Retrouver le résultat de la question 4.1. [S]

Corrigé du problème

Partie 1

1. Pour tout $m \geq q$, soit $P_m = \prod_{n=q}^{m} u_n$. Si l'un au moins des u_n était nul, alors la suite $(P_m)_{m\geq q}$ serait stationnaire en 0. Le produit infini $\prod_{n\geq q} u_n$ serait donc divergent.
   Inversement supposons que ce produit infini converge, et soit P sa valeur non nulle.
   Par définition $\lim_{m\to\infty} P_m = P$. Or $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ pour $n > q$. Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{P}{P} = 1$. [Q]

2. On a : $P_m = \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \prod_{n=2}^{m}\frac{n-1}{n} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n} = 1\cdot\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$
   Donc, quand $m\to\infty$: $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = 0$. Ce produit infini est donc divergent. [Q]

3. Comme précédemment, pour tout entier $m \geq 2$:
$$\begin{aligned} P_m = \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) &= \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+1)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2}\\ &= \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=3}^{m+1} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n^2} = 2\cdot m(m+1)\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{m^2} = \frac{m+1}{2m} \to \frac{1}{2}\end{aligned}$$
   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)$ est donc convergent, et sa valeur est $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{2}$. [Q]

4. Pour tout entier $m \geq 2$:
$$\begin{aligned} P_m &= \prod_{n=2}^{m}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \prod_{n=2}^{m}\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\\ &= \prod_{n=2}^{m}(n-1)\cdot\prod_{n=2}^{m}(n+2)\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n+1} = \prod_{n=1}^{m-1} n\cdot\prod_{n=4}^{m+2} n\cdot\prod_{n=2}^{m}\frac{1}{n}\cdot\prod_{n=3}^{m+1}\frac{1}{n}\\ &= 6\cdot m(m+1)(m+2)\cdot\frac{1}{6}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{3}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{m+2}{3m} \to \frac{1}{3}\end{aligned}$$
   Le produit infini $\prod_{n\geq 2}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big)$ est donc convergent, et $\prod_{n=2}^{\infty}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \frac{1}{3}$. [Q]

5. Posons $u_n = 1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. On a : $u_{2n-1} = 1+\frac{1}{2n-1} = \frac{2n}{2n-1}$ et $u_{2n} = 1-\frac{1}{2n} = \frac{2n-1}{2n}$.
   Ainsi $u_{2n-1}u_{2n} = 1$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit, pour tout $m \geq 1$:
$$P_{2m} = \prod_{n=1}^{2m} u_n = \prod_{n=1}^{m}(u_{2n-1}u_{2n}) = 1 \text{ et } P_{2m+1} = P_{2m}\,u_{2m+1} = 1+\frac{1}{2m+1}.$$
   La suite $(P_m)_{m\geq 1}$ converge donc vers 1. Autrement dit $\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) = 1$. [Q]